Math. P. 601-2

Bürja

Mathesis. Algebra generalis 230.

R

Der selbstlernende Algebrist, oder deutliche Anweisung zur ganzen Rechenkunst,

worunter
sowohl die Arithmetik und gemeine Algebra,
als auch die Differenzial- und Integral-Rechnung
begriffen ist

von
Abel Bürja.

Zweiter Theil.

Berlin und Libau,
bey Lagarde und Friedrich.
1786.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Zwölftes Hauptstück.

Von den Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe.

§. 1.

Es werden oft Fragen aufgegeben, wo mehr als eine unbekannte Größe verlanget wird. Wenn nun dergleichen Fragen auf einer bestimmten Art aufgelöset werden sollen, so muß man so viel Gleichungen daraus ziehen können, als unbekannte Größen verlanget werden. Man muß dergleichen Aufgaben nicht mit denen verwechseln, wo in der That nur eine unbekannte Zahl gefordert wird, die aber mehr als einen Werth bekommen kann, wie wir es im vorigen Hauptstücke bei den Gleichungen von höheren Graden gesehen haben.

§. 5.

Aufgabe.

Eine Aufgabe mit zwei unbekannten Größen auflösen.

Auflösung. Nachdem man beide Gleichungen die in der Aufgabe enthalten sind, aufgesetzet hat, so ziehe man aus der ersten Gleichung den Werth der einen unbekannten Größe, und diesen Werth setze man an ihrer Stelle in der zweiten Gleichung. Auf der Art enthält die zweite Gleichung nur noch eine einzige unbekannte Größe, deren Werth, wie im vorigen Hauptstücke gezeiget worden, allemal in bekannten Größen ausgedrücket werden kann. Diesen gefundenen Werth setze man wiederum in der ersten Gleichung oder auch in der zweiten, so bekommt man auch die andere unbekannte Größe.

Exempel. Es werden zwei Zahlen verlanget. Wenn man die eine um 9 vergrößert, so wird sie doppelt so groß als die andere; und wenn man die zweite um 3 vergrößert, so wird sie doppelt so groß, als die erste. Es seyen die verlangten Zahlen x und y, so bekömmt man diese beide Gleichungen.

$$x + 9 = 2y \quad (A$$
$$y + 3 = 2x \quad (B$$

Die Gleichung A giebet

$$x = 2y - 9$$

Diesen Werth von x setze man in die Gleichung B, so wird

$$y + 3 = 2(2y - 9)$$

oder $y + 3 = 4y - 18$

oder $18 + 3 = 4y - y$

oder $21 = 3y$

oder $7 = y$

Da man nun gefunden, daß $y = 7$, so schreibe man 7 anstatt y in der Gleichung A, so kömmt

$$x + 9 = 2.7$$
$$x + 9 = 14$$
$$x \ldots = 14 - 9 = 5$$

Also sind die beiden verlangten Zahlen 7 und 5. Man hätte auch, nachdem gefunden worden $y = 7$, diesen Werth in die Gleichung B setzen können.

$$7 + 3 = 2x$$
$$10 = 2x$$
$$5 = x$$

Man kann auch damit anfangen, daß man eine von beiden unbekannten Größen in beiden Gleichungen absondert, oder allein in ein Glied bringet, und übrigens eben so verfahren, wie jezt gezeiget worden.

Weil $x + 9 = 2y$, so ist $x = 2y - 9$ (C

Weil $y + 3 = 2x$, so ist $x = \frac{y + 3}{2}$ (D

Setzet

Setzet man nun den Werth von x der durch die Gleichung C gefunden worden, in die Gleichung D, so bekömmt man

$$2y - 9 = \frac{y + 3}{2}$$
$$4y - 18 = y + 3$$
$$4y - y = 18 + 3$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

Auf gleicher Weise kann auch x gefunden werden, indem man y absondert.

Weil $x + 9 = 2y$, so ist $y = \frac{x + 9}{2}$ (E

Weil $y + 3 = 2x$, so ist $y = 2x - 3$ (F

Setzet man nun den erst gefundenen Werth von y aus der Gleichung E in der Gleichung F, so wird

$$\frac{x + 9}{2} = 2x - 3$$
$$x + 9 = 4x - 6$$
$$9 + 6 = 4x - x$$
$$15 = 3x$$
$$5 = x$$

Eine andere Auflösung. Man kann oft die unbekannten Größen auf einer bequemeren Art finden, indem man beide Gleichungen entweder addiret oder subtrahiret, so daß die eine unbekannte Größe verschwinde.

Exempel. Die Zahl $37\frac{1}{2}$ soll in zwei Theile getheilet werden, so daß der größere Theil den kleineren um $2\frac{1}{3}$ übertreffe. Hier ist also die Summe der unbekannten Größen $37\frac{1}{2}$ und die Differenz ist $2\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Zu} & x + y & = & 37\tfrac{1}{2} \\
\text{addire} & x - y & = & 2\tfrac{1}{3} \\
\hline
\text{so ist} & 2x & = & 39\tfrac{5}{6} \\
 & 12x & = & 239 \\
 & x & = & \tfrac{239}{12} = 19\tfrac{11}{12}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Von} & x + y & = & 37\tfrac{1}{2} \\
\text{subtr.} & x - y & = & 2\tfrac{1}{3} \\
\hline
\text{so wird} & 2y & = & 35\tfrac{1}{6} \\
 & 12y & = & 211 \\
 & y & = & \tfrac{211}{12} = 17\tfrac{7}{12}
\end{array}$$

Folglich sind beide verlangete Zahlen $19\frac{11}{12}$ und $17\frac{7}{12}$. Die Summe derselben ist $37\frac{1}{2}$, und die Differenz $2\frac{1}{3}$. Diese Frage kann auch mit einer einzigen unbekannten Größe aufgelöset werden, indem man setzet, die eine Zahl sey x und die andere $x + 2\frac{1}{3}$. Siehe das XI. Hauptst. §. 2. Ueberhaupt, wie dort schon erinnert worden, lassen sich Aufgaben wo mehr als eine unbekannte Größe vorkömmt, oft mit einer einzigen auflösen, wenn nemlich die Verhältnisse der unbekannten Größen sehr einfach sind.

Noch eine andere Auflösung. Wenn die unbekannten Größen in beiden Gleichungen verschiedene Koeffizienten haben, so multiplizire man die erste Gleichung mit dem Koeffizienten, welchen die Größe x in der anderen Gleichung hat. Ebenfalls multiplizire man die zweite Gleichung mit dem Koeffizienten, welchen x in der ersten Gleichung bei sich führet. Hernach addire oder subtrahire man beide Gleichungen, so verschwindet x und man bekömmt den Werth von y. Eben so verfahre man mit y um x zu finden.

Exempel. Es werden zwei Zahlen verlanget: das Vierfache der ersten, mit dem Fünffachen der zweiten machet

chet 23. Das siebenfache der ersten mit dem Zweifachen der anderen, machet 20. Es ist also

$$4x + 5y = 23$$
$$7x + 2y = 20$$

Um x wegzuschaffen, multiplizire man die erste Gleichung, das ist, alle Sätze derselben, mit 7, und die zweite Gleichung mit 4. Hernach subtrahire man die zweite von der ersten.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Von} & 28x + 35y & = & 161 \\ \text{subtr.} & 28x + 8y & = & 80 \\ \hline \text{so wird} & 27y & = & 81 \\ & y & = & \frac{81}{27} = 3 \end{array}$$

Um nun auch y wegzuschaffen, multiplizire man die zweite Gleichung mit 5 und die erste mit 2, hierauf subtrahire man die erste von der zweiten.

$$\begin{array}{rcl} 35x + 10y & = & 100 \\ 8x + 10y & = & 46 \\ \hline 27x \ldots & = & 54 \\ x \ldots & = & \frac{54}{27} = 2 \end{array}$$

Also sind die verlangten Zahlen 3 und 2. Wenn beide Koeffizienten, womit man multipliziren soll, ein gemeinschaftliches Maaß haben, so kann man sie in Gedanken oder abwärts durch das gemeinschaftliche Maaß dividiren, und bei der Multiplikazion die Quozienten anstatt der Koeffizienten selbst, gebrauchen. Es sey

$$\begin{array}{rcl||c|c} 6x + 5y & = & 97 & 3 & 1 \\ 4x + 10y & = & 138 & 2 & 2 \end{array}$$

Hier laßen sich die Koeffizienten 6 und 4 durch 2 messen, und die Quozienten sind 3 und 2. Ebenfalls laßen sich die Koeffizienten 5 und 10 durch 5 messen, und die Quozienten sind 1 und 2. Man muß also die erste Gleichung mit 2 und die andere mit 3 multipliziren, um x wegzuschaffen.

Ferner muß man die erste Gleichung mit 2 und die andere mit 1 multipliziren um y wegzuschaffen.

$$\begin{array}{rcl} 12x + 10y &=& 194 \\ 12x + 30y &=& 414 \\ \hline -20y &=& -220 \\ \text{oder} \quad +20y &=& +220 \\ y &=& \frac{220}{20} = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 12x + 10y &=& 194 \\ 4x + 10y &=& 138 \\ \hline 8x \ldots &=& 56 \\ x \ldots &=& 56 : 8 = 7 \end{array}$$

Die unbekannte Zahlen sind also 7 und 11.

Anmerkung. Die Regeln welche wir hier gegeben haben, sind zwar für die gewöhnlichsten arithmetischen Aufgaben hinreichend. Aber in schwereren Fällen, und hauptsächlich wenn Potenzen der unbekannten Größen vorhanden sind, muß sich ein jeder durch eigenes Nachdenken zu behelfen suchen. Oft muß man die Glieder einer Gleichung zur nemlichen Potenz erheben, welche sich in der anderen Gleichung findet, auf daß man beiderseits gleich hohe Potenzen bekomme. Es sey gegeben $p = 3yz$ und $q = y^3 + z^3$. Um hier in beiden Gleichungen die nemlichen Potenzen zu bekommen, erhebe man die Glieder der ersten Gleichung zur dritten Potenz, so bekömmt man folgende zwei Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} p^3 &=& 27y^3z^3 \\ q &=& y^3 + z^3 \end{array}$$

Aus diesen beiden Gleichungen laßen sich y und z bestimmen, wie schon im vorigen Hauptstücke §. 26 bei Gelegenheit der kubischen Gleichungen gezeiget worden. Was wir hier y genannt haben, heißt dort a, und was hier z genannt ist, heißt dort b.

§. 3.

§. 3.

Aufgabe.

Eine Aufgabe auflösen, wo mehr als zwei unbekannte Größen vorkommen.

Auflösung. Man suche vor allen Dingen in der Aufgabe so viel Gleichungen als unbekannte Größen sind. Nun sondere man die eine unbekannte Größe x in der ersten Gleichung ab, so daß sie allein ein Glied ausmache, und den gefundenen Werth setze man in die zweite Gleichung. In dieser veränderten zweiten Gleichung, sondere man eine andere unbekannte Größe y ab, und ihren Werth setze man in dem gefundenen Werthe von x. Die Werthe von x und y setze man in die dritte Gleichung, und sondere noch eine andere unbekannte Größe z ab. Den gefundenen Werth der Größe z setze man in den vorher gefundenen Werthen von x und y. Sind noch mehrere unbekannte Größen, so fahre man fort, sie alle eine nach der anderen wegzuschaffen. Zulezt erhält man eine Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe. Und wenn ihr Werth gefunden ist, so braucht man ihn nur in den vorher gefundenen Werthen der übrigen unbekannten Größen zu sezen, um sie alle zu bekommen.

Exempel. Es werden drei Zahlen verlanget. Die erste und zweite machen zusammen 23, die erste und dritte 24, die zweite und dritte 25. Diese Frage enthält folgende 3 Gleichungen.

$$x + y = 23 \quad (A$$
$$x + z = 24 \quad (B$$
$$y + z = 25 \quad (C$$

Wenn man x in der Gleichung A absondert, so ist

$$x = 23 - y \quad (D$$

Wenn man diesen Werth von x in der Gleichung B sezet, so wird

$$23 - y + z = 24$$

Wenn man hier y absondert, so ist

$$23 - 24 + z = y$$

oder $$y = z - 1 \quad (E$$

Setzet man diesen Werth von y in der Gleichung D, welche den Werth von x ausdrücket, so wird

$$x = 23 - (z - 1)$$
$$x = 23 - z + 1$$
$$x = 24 - z \quad (F$$

Den gefundenen Werth von y, nemlich aus der Gleichung E setze man nun auch in der dritten gegebenen Gleichung, nemlich C, so entstehet

$$(z - 1) + z = 25$$
$$2z - 1 = 25$$
$$2z = 26$$
$$z = 13$$

Da nun z bekannt ist, so setze man dessen Werth, nemlich 13, in den leztgefundenen Werthen von x und y, nemlich in den Gleichungen E und F, so bekömmt man

$$y = 13 - 1 = 12$$
$$y = 24 - 13 = 11$$

Die verlangete Zahlen sind also 11, 12 und 13. Es ist $11 + 12 = 23$, $11 + 13 = 24$, $12 + 13 = 25$, wie in der Aufgabe gefordert wurde.

Eine andere Auflösung. Man findet oft die Werthe aller unbekannten Größen, indem man die gegebenen Gleichungen verschiedentlich addiret oder subtrahiret.

Exempel. Es werden drei Zahlen verlanget. Die beiden ersten machen zusammen 6, die erste und dritte machen 11, die zweite und dritte machen 15. Also ist

$$x + y = 6 \quad (A$$
$$x + z = 11 \quad (B$$
$$y + z = 15 \quad (C$$

Von

Von A subtrahire man B, und addire hernach C

$$x + y = 6$$
$$\text{subtr.}\quad x + z = 11$$
$$y - z = -5$$
$$\text{addire}\quad y + z = 15$$
$$2y = 10$$
$$y = 5$$

Von B subtrahire man A, und addire C

$$x + z = 11$$
$$\text{subtr.}\quad x + y = 6$$
$$z - y = 5$$
$$\text{addire}\quad z + y = 15$$
$$2z = 20$$
$$z = 10$$

Von A subtrahire man C, und addire B

$$x + y = 6$$
$$\text{subtr.}\quad z + y = 15$$
$$x - z = -9$$
$$\text{addire}\quad x + z = 11$$
$$2x \ldots = 2$$
$$x \ldots = 1$$

Die verlangete Zahlen sind also 1, 5 und 10. Uebrigens hätte man diese Frage eben so gut nach der ersten Manier auflösen können.

Noch eine andere Auflösung. Wenn die Gleichungen alle die nemliche Gestalt haben, und nur die Koeffizienten verschieden sind, so kann man folgendermaßen verfahren. Man vergleichet die erste und zweite Gleichung, hernach die erste und dritte, ferner die erste und vierte, u. s. w. indem man jedesmal die erste unbekannte Größe vermittelst der Multiplikazion und Subtrakzion weg-

wegschaffet, wie im §. 2 in der dritten Auflösung gezeiget worden. Wenn dieses geschehen, so hat man eine Gleichung weniger als vorher, und auch eine unbekannte Größe weniger. Nun wiederhole man das nemliche Verfahren, bis daß nur eine einzige Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe bleibet, und man folglich den Werth derselben finden kann. Verändert man hernach die Ordnung der unbekannten Größen, so kann man die übrigen auf der nemlichen Art finden.

Exempel. Es werden drei Zahlen verlanget. Das Doppelte der ersten, das Dreifache der zweiten und das Vierfache der dritten, machen zusammen 20. Das Vierfache der ersten, das Dreifache der zweiten und das Doppelte der dritten machen zusammen 16. Das Dreifache der ersten, das Doppelte der zweiten, und das Vierfache der dritten, machen zusammen 19. Diese Frage giebt folgende Gleichungen.

$$2x + 3y + 4z = 20 \quad (A$$
$$4x + 3y + 2z = 16 \quad (B$$
$$3x + 2y + 4z = 19 \quad (C$$

Man nehme die beiden ersten Gleichungen A und B, und schaffe x hinaus. (§. 2 dritte Auflös.) Weil die Koeffizienten 2 und 4 durch 2 gemessen werden, so braucht man nur die Quozienten 1 und 2 zu Multiplikatoren anzunehmen; die erste Gleichung wird also mit 2 und die zweite mit 1 multipliziret. Hierauf wird subtrahiret.

$$4x + 6y + 8z = 40$$
$$\text{subtr.}\quad 4x + 3y + 2z = 16$$
$$3y + 6z = 24$$
$$\text{oder}\quad y + 2z = 8 \quad (D$$

Nun nehme man die erste und dritte Gleichung, nemlich A und C, und schaffe ebenfalls x weg, indem man A mit 3 und C mit 2 multipliziret, und hierauf subtrahiret.

$$\begin{array}{rl} & 6x + 9y + 12z = 60 \\ \text{subtr.} & \underline{6x + 4y + 8z = 38} \\ & \phantom{6x +{}} 5y + 4z = 22 \quad (E \end{array}$$

Man hat also die drei gegebene Gleichungen schon bis auf 2 vermindert, nemlich

$$\begin{array}{rl} y + 2z = 8 & (D \\ 5y + 4z = 22 & (E \end{array}$$

Aus diesen beiden schaffe man y weg, indem man die erste mit 5 und die zweite mit 1 multipliziret.

$$\begin{array}{rl} & 5y + 10z = 40 \\ \text{subtr.} & \underline{5y + 4z = 22} \\ & \phantom{5y +{}} 6z = 18 \\ & \phantom{5y +{}} z = 18 : 6 = 3 \end{array}$$

So wie z gefunden worden, könnte man auch y finden. Man müßte aus den drei Gleichungen A, B und C erstlich z und hernach x wegschaffen. Eben so ließe sich x finden, wenn man z und y wegschaffete. Hier aber läßt sich die Arbeit erleichtern. Man nehme die Gleichungen D und E wieder vor, und schaffe daraus z weg, so bekömmt man y.

$$\begin{array}{rl} y + 2z = 8 & \| \; 1 \\ 5y + 4z = 22 & \| \; 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2y + 4z = 16 \\ \underline{5y + 4z = 22} \\ -3y \ldots = -6 \\ 3y \ldots = 6 \\ y \ldots = 6 : 3 = 2 \end{array}$$

Da nun z und y bekannt sind, so kann man x finden, wenn man die Werthe von z und y in einer der gegebenen Gleichungen setzet. Z. E.

Weil

$$\text{Weil } 2x+3y+4z=20 \quad (A)$$
$$\text{so ist } 2x+3.2+4.3=20$$
$$2x+6+12=20$$
$$2x+18=20$$
$$2x=20-18=2$$
$$x=1$$

Die drei verlangten Zahlen sind folglich 1, 2 und 3. Man mache die Probe.

1, doppelt machet	2	1, vierfach	4	1, dreifach	3
2, dreifach . . .	6	2, dreifach	6	2, doppelt	4
3, vierfach . . .	12	3, doppelt	6	3, vierfach	12
	20		16		19

§. 4.

Eine unbestimmte Aufgabe, ist diejenige, wo weniger Gleichungen gegeben werden, als unbekannte Grössen sind, so daß sich die unbekannten Größen nicht durch die bekannten bestimmen laßen, sondern nur ihr Verhältniß gegen einander gefunden wird.

Man muß diese unbestimmten Aufgaben nicht mit den unbestimmten Zahlen verwechseln, die durch Buchstaben ausgedrücket werden. Eine unbestimmte Aufgabe kann so wohl bei bestimmten als unbestimmten Koeffizienten statt finden. Es wäre vielleicht rathsamer gewesen, wenn die Erfinder diese Art Aufgaben lieber willkürliche Aufgaben oder veränderliche Aufgaben genannt hätten.

§. 5.

Eine unbestimmte Aufgabe auflösen.

Auflösung. Man suche aus den gegebenen Gleichungen die Werthe so vieler unbekannten Größen als Gleichungen gegeben sind. Diese Werthe werden noch unbekannte Größen enthalten, welche man alsdann bestimmen kann, wie man will.

Exem-

Exempel I. Man verlanget zwei Zahlen. Das Vierfache der ersten soll dem Quadrate der anderen gleich seyn. Hier sind zwei unbekannte Größen, aber nur eine Gleichung, nemlich

$$4x = yy$$

folglich $$x = \frac{yy}{4}$$

Hier bleibet y unbestimmt, und man mag anstatt y eine Zahl annehmen, wie man will, so wird sie allemal der Frage Genüge leisten. Es sey $y = 6$, so wird

$$x = \frac{6.\ 6}{4} = 9$$

Also sind 9 und 6 Zahlen, welche die verlangete Eigenschaft haben. Es sey $y = 10$, so wird

$$x = \frac{10.\ 10}{4} = 25$$

Also sind die Zahlen 25 und 10 eben so gut, als 9 und 6, die Frage aufzulösen. Mit einem Worte, so bald y bestimmt wird, folget der gehörige Werth von x aus der gefundenen Gleichung.

Anstatt daß man hier x in der gegebenen Gleichung abgesondert hat, hätte man auch y absondern können.

Weil $4x = yy$
so ist $\sqrt{4x} = y$
oder $2\sqrt{x} = y$

Setzet man nun anstatt x, welche Zahl man will, so giebt deren Quadratwurzel, doppelt genommen, einen Werth von y. Es sey z. E. $x = 49$ so ist $\sqrt{x} = 7$, und $2\sqrt{x}$ oder $y = 14$. Also haben die Zahlen 49 und 14 die vorgeschriebene Eigenschaft. Es ist nemlich 4 mal $49 = 196$ und $14^2 = 196$.

Exempel II. Man soll drei Zahlen finden. Deren Summe soll 20 seyn; ferner soll 138 entstehen, wenn man

man die erste fünfmal, die zweite siebenmal, und die dritte achtmal nimmt. Hier haben wir zwei Gleichungen

$$x + y + z = 20 \quad (A$$
$$5x + 7y + 8z = 138 \quad (B$$

Man multiplizire die Gleichung A mit 5 und B mit 1, und subtrahire.

$$\begin{array}{rl} & 5x + 5y + 5z = 100 \\ \text{subtr.} & \underline{5x + 7y + 8z = 138} \\ & -2y - 3z = -38 \\ \text{oder} & 2y + 3z = 38 \quad (C \end{array}$$

Man multiplizire ferner die Gleichung A mit 7 und B mit 1, und subtrahire wie gewöhnlich

$$\begin{array}{rl} & 7x + 7y + 7z = 140 \\ \text{subtr.} & \underline{5x + 7y + 8z = 138} \\ & 2x \ldots\ldots - z = 2 \quad (D \end{array}$$

Wenn man aus den Gleichungen C und D y und x absondert, so bekömmt man

$$y = 19 - \frac{3z}{2}$$
$$x = \tfrac{1}{2}z + 1$$

Hier bleibet z unbestimmt. Man setze also anstatt z welche Zahl man will, so wird allemal für y und x ein Werth heraus kommen, welcher der Frage entspricht. Z. E. Man nehme $z = 2$, so wird

$$x = 2$$
$$y = 16$$
$$z = 2$$

Man nehme $z = 4$, so ist

$$x = 3$$
$$y = 13$$
$$z = 4$$

Es

Es sey $z = 6$, so ist

$$x = 4$$
$$y = 10$$
$$z = 6$$

Man nehme $z = 8$, so wird

$$x = 5$$
$$y = 7$$
$$z = 8$$

Und so kann man den Werth von z bestimmen, wie man will.

Exempel III. Man suche vier Zahlen. Deren Summe ist 10. Die erste fünfmal genommen, die zweite sechsmal, die dritte siebenmal, die vierte achtmal, machen zusammen 70. Diese Frage giebt nur zwei Gleichungen, obgleich vier Zahlen unbekannt sind.

$$v + x + y + z = 10$$
$$5v + 6x + 7y + 8z = 70$$

Man vertilge aus diesen Gleichungen erstlich eine von den unbekannten Zahlen, z. E. z, indem man die erste Gleichung mit 8 und die andere mit 1 multiplizirет und hernach subtrahiret.

$$8v + 8x + 8y + 8z = 80$$
$$\text{subtr.}\quad 5v + 6x + 7y + 8z = 70$$
$$3v + 2x + y \ldots = 10 \quad (G$$

Man vertreibe noch eine unbekannte Größe aus den gegebenen Gleichungen, z. E. y, vermittelst der Multiplikazion mit 7 und mit 1.

$$7v + 7x + 7y + 7z = 70$$
$$\text{subtr.}\quad 5v + 6x + 7y + 8z = 70$$
$$2v + x \ldots - z = 0 \quad (H$$

Aus den Gleichungen G und H, sondere man y und z ab, so bekömmt man,

aus G) $y = 10 - 3v - 2x$ (I

aus H) $z = 2v + x$ (K

Die Zahlen v und x bleiben also willkürlich, und man kann sie bestimmen wie man will. Man setze jedesmal ihren angenommenen Werth in den Gleichungen I und K, so werden dadurch y und z bestimmet werden.

Es sey $v = 1$ und $x = 2$, so wird

$$v = 1$$
$$x = 2$$
$$y = 3$$
$$z = 4$$

Es sey $v = 1$ und $x = 3$, so wird

$$v = 1$$
$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z = 5$$

Es sey $v = 1$ und $x = 1$, so wird

$$v = 1$$
$$x = 1$$
$$y = 5$$
$$z = 3$$

Und so kann die Frage auf unendlich viel Arten aufgelöset werden.

§. 6.

Negative Größen können zwar in der Algebra, eben sowohl als positive, zur Auflösung der unbestimmten Aufgaben dienen. Jedoch werden in den arithmetischen Aufgaben meistens positive Zahlen verlanget. Um nun solche zu erhalten, gebe man Achtung, ob in den gefundenen Gleichungen, wo der Werth einer unbekannten Größe durch bekannte und unbekannte ausgedrücket ist, negative Größen enthalten sind oder nicht. Sind keine negative Größen darinn, so darf man nicht befürchten, daß man bei der Auflösung auf negative Zahlen gerathe, man mag übrigens die willkürlichen Größen, so groß oder so klein anneh-

annehmen als man will. Sind aber negative Größen in den lezten Gleichungen vorhanden, so müssen die positiven Theile größer seyn als die negativen, wenn ein positiver Werth herauskommen soll. Dieses drücke man durch das Zeichen der Ungleichheit aus, und verfahre hernach mit dem gefundenen Ausdrucke der Ungleichheit, wie mit einer Gleichung; so wird sich finden, wie groß oder wie klein die willkürlichen Größen angenommen werden können, wenn alle verlangete Größen positiv werden sollen.

Im ersten Exempel des vorigen Paragraphs hat man gefunden

$$x = \frac{yy}{4}$$

oder $y = 2\sqrt{x}$

Da hier im Werthe von x und y keine negative Größe vorkömmt, so kann man y oder x so groß oder so klein bestimmen, als man will. So bald man nur für die eine unbekannte Größe einen positiven Werth annimmt, so wird die andere auch positiv werden.

Im zweiten Exempel hat man gefunden

$$y = 19 - \frac{3z}{2}$$

$$x = \tfrac{1}{2}z + 1$$

In der ersten dieser Gleichungen enthält der Werth von y eine positive und eine negative Größe. Wenn also y positiv werden soll, so muß die positive Größe nothwendig mehr gelten als die negative. Es muß also seyn

$$19 > \frac{3z}{2}$$

folglich $38 > 3z$

$$\frac{38}{3} > z$$

$$12\tfrac{2}{3} > z$$

Woraus man siehet, daß, wenn y positiv werden soll, z nothwendig kleiner als $12\frac{2}{3}$ angenommen werden muß. Wird $z = 12\frac{2}{3}$ angenommen, so wird $y = 0$, wird aber z größer als $12\frac{2}{3}$ angenommen, so wird y negativ. Man versuche z. E. anzunehmen $z = 13$.

$$\text{Weil } y = 19 - \frac{3z}{2}$$

$$\text{so wird } y = 19 - \frac{3 \cdot 13}{2}$$

$$\text{oder } 2y = 38 - 3 \cdot 13$$

$$\text{oder } 2y = 38 - 39$$

$$\text{oder } 2y = -1$$

$$\text{oder } y = -\tfrac{1}{2}$$

Im dritten Exempel des vorigen Paragraphs wurde gefunden

$$y = 10 - 3v - 2x$$

$$z = 2v + x$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folget, daß man, um y positiv zu bekommen, nehmen müsse

$$10 > 3v + 2x$$

Folglich müssen v und x so bestimmet werden, daß 3 mal v und 2 mal x weniger als 10 ausmachen. Aus diesem Ausdrucke der Ungleichheit folget ferner

$$10 - 3v > 2x$$

$$5 - \tfrac{3}{2}v > x$$

Wenn also x positiv werden soll, so muß noch seyn

$$5 > \tfrac{3}{2}v$$

$$10 > 3v$$

$$3\tfrac{1}{3} > v$$

Aus der nemlichen Ungleichung, wenn ich es so nennen darf, nemlich aus $10 > 3v + 2x$, folget wiederum

$$10 - 2x > 3v$$

Folg-

Folglich wenn v positiv werden soll, so ist

$$10 > 2x$$
$$5 > x$$

Also muß x kleiner als 5 angenommen werden. Aus allem diesen siehet man, daß wenn alle Größen in der Auflösung positiv werden sollen, man nothwendig v unter $3\frac{1}{3}$ bestimmen müsse, und x unter 5, jedoch allemal so daß v dreimal genommen und x zweimal genommen, nicht über 10 ausmachen. Wenn man nemlich v unter $3\frac{1}{3}$ bestimmet hat, so muß man den angenommenen Werth dreifach nehmen und ihn von 10 subtrahiren, so bleibet ein Rest, welchen das zweifache x nicht übersteigen soll. Man dividire also diesen Rest durch 2, so kömmt ein Werth den x nicht übersteigen soll. Z. E. Gesezet man hätte angenommen $v = 2$, so ist $3v = 6$. Diese 6 von 10 abgezogen, so bleiben für $2x$ noch 4, oder für x noch 2. Es muß also x unter 2 seyn, wenn y positiv werden soll. Will man erstlich x bestimmen, so nehme man x unter 5, den angenommenen Werth verdoppele man, so hat man $2x$. Dieses Doppelte ziehe man von 10 ab. Was übrig bleibet, ist für die $3v$. Man nehme also den dritten Theil des Restes, so bekömmt man den Werth, welchen v nicht übersteigen kann. Es sey $x = 4$, so ist $2x = 8$. Diese 8 von 10 abgezogen, so bleiben 2. Davon ist der dritte Theil $\frac{2}{3}$. Wenn also x, 4 gilt, so muß v unter $\frac{2}{3}$ angenommen werden, daß y positiv werde.

§. 7.

In vielen arithmetischen Aufgaben werden nicht nur positive Zahlen, sondern zugleich ganze Zahlen ohne Brüche verlanget. Es muß also gezeiget werden, wie man solche erhalten kann. Es sey diese Frage aufgegeben. Es sind zwei ganze Zahlen; wenn man die eine mit 25 und die andere mit 16 multipliziret, so ist das zweite Produkt um 1 größer, als das erste: welches sind diese beiden Zahlen?

 Die

Die eine sey x und die andere y, so wird

$$25x + 1 = 16y$$

$$\frac{25x + 1}{16} = y$$

Der Umstand, daß x und y ganze Zahlen seyn sollen, machet daß man nicht der Größe x einen jeden Werth nach Belieben geben kann. Man dividire den Zähler $25x + 1$ durch den Nenner 16, so bekömmt man

$$y = \frac{25x + 1}{16} = x + \frac{9x + 1}{16}$$

Es sey nun der neue Bruch $\frac{9x + 1}{16} = k$, so ist $9x + 1 = 16k$, und $x = \frac{16k - 1}{9}$. Man verrichte wiederum die Division, so bekömmt man

$$x = \frac{16k - 1}{9} = k + \frac{7k - 1}{9}$$

Es sey $\frac{7k - 1}{9} = l$, so ist $7k - 1 = 9l$ und $k = \frac{9l + 1}{7}$. Wenn man noch dividiret, so wird

$$k = \frac{9l + 1}{7} = l + \frac{2l + 1}{7}$$

Es sey $\frac{2l + 1}{7} = m$, so wird $2l + 1 = 7m$ und $l = \frac{7m - 1}{2}$. Man dividire weiter

$$l = \frac{7m - 1}{2} = 3m + \frac{m - 1}{2}$$

Es sey $\frac{m - 1}{2} = n$, so ist $m - 1 = 2n$, und $m = 2n + 1$. Hier höret man auf zu dividiren, weil kein Bruch mehr vorhanden ist. Nun gehe man rückwärts, so hat man

$m = 2n$

$$m = 2n + 1$$
$$l = 3m + n = 7n + 3$$
$$k = l + m = 9n + 4$$
$$x = k + l = 16n + 7$$
$$y = x + k = 25n + 11$$

Man siehet leicht ein, daß wenn man für n eine ganze Zahl annimmt, die Größen $16n+7$ und $25n+11$ auch ganze Zahlen werden müssen. Nimmt man an $n=0$, so wird

$$x = 7$$
$$y = 11$$

Nimmt man $n=1$, so wird

$$x = 23$$
$$y = 36$$

Nimmt man $n=2$, so ist

$$x = 39$$
$$y = 61$$

Nimmt man $n=3$, so bekömmt man

$$x = 55$$
$$y = 86$$

Nimmt man $n=4$, so entstehet

$$x = 71$$
$$y = 111$$

Bei ähnlichen unbestimmten Gleichungen mit zwei unbekannten Größen kann man auf ähnlicher Art verfahren. Nur muß man diejenige unbekannte Zahl absondern, deren Werth so beschaffen ist, daß die Division statt finden könne. Z. E. Die gegebene Gleichung war

$$25x + 1 = 16y$$

hätte man x abgesondert, so würde man bekommen haben

$$x = \frac{16y - 1}{25}$$

 wo

wo der Nenner größer ist, als 16, und folglich die angezeigete Methode nicht Statt finden kann.

Bei andern Fällen muß man suchen, sich auf einer anderen Art zu behelfen. Z. E. Beim ersten Exempel im §. 5, war die Gleichung

$$x = \frac{yy}{4} = \frac{y \cdot y}{2.2} = \frac{y}{2} \times \frac{y}{2}$$

Soll nun $\frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2}$ eine ganze Zahl seyn, so muß y durch 2 gemessen werden. Folglich muß y entweder 2 oder ein Multiplum von 2, das ist, eine Paarzahl seyn.

§. 8.

Die Alligazion-Rechnung, ist die Kunst, Dinge von verschiedenem Werthe, so mit einander zu vermischen, daß das Vermischte einen gewissen gesezten Werth bekomme. Diese Rechnungsart gehöret hierher, weil ihr Beweis sich auf Gleichungen gründet, worinn mehr als eine unbekannte Zahl vorkömmt.

Wenn zwei Dinge von verschiedenem Werthe mit einander zu vermischen sind, so schreibe man die Werthe der Einheit von jeder zu vermischenden Sache gerade unter einander. Den gemeinschaftlichen Werth, welchen die Einheit erhalten soll, schreibe man linker Hand gegen die Mitte. Es muß nun der gemeinschaftliche Werth kleiner seyn, als der Werth des einen, und größer als der Werth des anderen zu vermischenden Dinges. Den kleineren Werth subtrahire man vom mittleren, und schreibe den Rest zur Rechten neben dem größeren Werthe. Den mittleren Werth subtrahire man ferner vom größeren und schreibe den Rest neben dem kleineren. Die aufgeschriebenen Differenzen zeigen die Proporzion an, wornach die Vermischung geschehen muß, auf daß die Einheit den gesezten gemeinschaftlichen Werth erhalte.

Exem-

Exempel I. Von einer Art Wein kostet das Maaß 6 Groschen, von einer anderen Art 16 Groschen, wie muß man diese Weine vermischen, daß das Maaß 12 Groschen zu stehen komme?

12	6	4
	16	6

Hier sage ich, 6 von 12 bleiben 6, die ich neben 16 schreibe. Ferner 12 von 16 bleiben 4, die ich neben 6 schreibe. Ich sehe also, daß vom schlechteren Weine allemal 4 Maaß gegen 6 Maaß vom besseren genommen werden müssen. Will ich also eine gewisse Quantität vom mittleren Preise vermischen, z. E. 100 Maaß, so bediene ich mich der Gesellschaftsrechnung (IX. Hauptst. §. 44). Die Verhältnißzahlen sind 4 und 6. Diese werden addiret. Dann wird gesaget: 10 Maaß geben 4 Maaß schlechteren Weines, wie viel 100 Maaß? und 10 Maaß geben 6 Maaß besseren Weines, wie viel 100 Maaß?

4 schlechter
6 besser
———
10 vermischt.

	4
1ø	10ø
	40 schlechter
	6
1ø	10ø
	60 besser.

40 schlechter
60 besser
———
100 vermischt.

Will ich nur wissen, wie viel von jeder Sorte auf 1 Maaß kommen soll, so muß ich sagen: 10 Maaß geben 4, was 1 Maaß? und 10 Maaß geben 6, was 1 Maaß?

$$\begin{array}{rr} & 4 \\ 10 & 1 \\ \hline & \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ schlechter} \\ & 6 \\ 10 & 1 \\ \hline & \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ besser.} \end{array}$$

Wenn man also erfahren will, wie viel von jeder Art auf die Einheit gehet, so summire man die gefundenen Differenzen, und dividire jede Differenz durch die Summe beider Differenzen.

$$\begin{array}{r|r|l} & 6 & 4 & \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ 12 & & & \\ & 16 & 6 & \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\ & & \overline{10} & \end{array}$$

Man kann sich auch der gefundenen Brüche bedienen um zu finden, wie viel von jeder Sorte auf eine gewisse Quantität des Gemischten gehen soll. Man darf nur die gegebene Quantität mit den gefundenen Brüchen multipliziren. Will ich also wissen, wie viel von jeder Art Wein auf 100 Maaß genommen werden soll, so bekomme ich

$\frac{2}{5} \cdot 100 = 40$ schlechter
$\frac{3}{5} \cdot 100 = 60$ besser.

Denn weil auf 1 Maaß $\frac{2}{5}$ schlechteren Weines genommen werden muß, so müssen auf 100 Maaß, auch 100 mal $\frac{2}{5}$ genommen werden. Und weil 1 Maaß $\frac{3}{5}$ besseren Weines enthält, so müssen 100 Maaß 100mal $\frac{3}{5}$ davon enthalten.

Exempel II. Wie muß 8löthiges und 11löthiges Silber vermischet werden, daß 10löthiges daraus entstehe? Um diese Frage zu verstehen, muß man wissen, daß 8, 10, 11 löthiges Silber soviel ist, als Silber wo auf eine Mark oder 16 Loth allemal 8, 10 oder 11 Loth rein Silber sind, und das übrige Kupfer. Hier kann man das reine Silber

ber als den Werth der Mark betrachten, welche also 8, 10 oder 11 Loth rein Silber gilt.

	8	1	$\frac{1}{3}$
10			
	11	2	$\frac{2}{3}$
		3	

Es muß also vom schlechteren Silber auf die Mark, oder überhaupt auf jeder Quantität $\frac{1}{3}$ und vom besseren $\frac{2}{3}$ genommen werden.

Exempel II. Wie viel Kupfer muß zu 14löthigem Silber geschmolzen werden, daß es 10löthig werde. Hier enthält die Mark Kupfer kein Silber, also ist ihr Werth an reinem Silber 0 Loth.

	0	4	$\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$
10			
	14	10	$\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$
		14	

Es muß folglich auf 1 Mark, oder auf jede andere Quantität $\frac{2}{7}$ Kupfer und $\frac{5}{7}$ vierzehnlöthiges Silber genommen werden.

Exempel IV. Man hat zweierlei Getreide: von einem kostet der Scheffel $\frac{3}{4}$ Thaler und vom anderen $1\frac{1}{6}$ Thaler. Wie muß es vermischet werden, daß der Scheffel $\frac{7}{8}$ Thaler zu stehen komme. Der Aufsatz stehet anfänglich also

	$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{8}$	
	$1\frac{1}{6}$

Um hier die Brüche wegzuschaffen, multiplizire man die drei gegebenen Werthe mit dem gemeinschaftlich Gemessenen der Nenner, nemlich hier mit 24, so bekömmt man folgende Rechnung

18

	18	7	$\frac{7}{10}$
21			
	28	3	$\frac{3}{10}$
		10	

Es müssen also vom schlechteren Getreide $\frac{7}{10}$ und vom besseren $\frac{3}{10}$ genommen werden.

Beweis. Laßt uns das lezte Exempel anstatt des Beweises, untersuchen. Gesetzet, vom schlechteren Korne kostet der Scheffel a Thaler, vom besseren b Thaler, vom mittleren soll der Scheffel c Thaler kosten. Wie viel muß man von jeder Art nehmen, daß auf einer Quantität von d Scheffeln, der Scheffel wirklich c Thaler zu stehen komme? Gesetzet man muß vom schlechteren zu a Thaler, x Scheffel nehmen, und vom besseren zu b Thaler y Scheffel. So müssen diese x und y Scheffel zusammen d Scheffel ausmachen. Dieses giebt die erste Gleichung

$$x + y = d \quad (A$$

Ferner, x Scheffel, den Scheffel zu a Thaler, kosten ax Thaler, und y Scheffel zu b Thaler kosten by Thaler, d Scheffel zu c Thaler müssen cd Thaler kosten. Die Vermischung soll aber so geschehen, daß der Preis der x und y Scheffel die cd Thaler ausmache. Also ist

$$ax + by = cd \quad (B$$

Man hat also für zwei unbekannte Größen zwei Gleichungen gefunden. Man multiplizire die erste Gleichung mit a und subtrahire sie von der zweiten

$$\begin{array}{rl} & ax + by = cd \\ \text{subtr.} & ax + ay = ad \\ \hline & (b - a)y = (c - a)d \end{array}$$

$$y = \frac{c - a}{b - a} d \quad (C$$

Man

Man multiplizire die Gleichung A mit b, und subtrahire die Gleichung B.

$$\begin{array}{l} bx+by=bd \\ ax+by=cd \\ \hline (b-a)x \quad =(b-c)d \\ \qquad x \quad =\frac{b-c}{b-a}d \quad (D \end{array}$$

Es sey nun die Quantität d des vermischten $=1$, so wird

$$y=\frac{c-a}{b-a} \text{ aus der Gleichung C}$$

$$x=\frac{b-c}{b-a} \text{ aus der Gleichung D.}$$

Nun suche man x und y nach der vorgeschriebenen Alligazion-Rechnung

$$\begin{array}{c|c|c|l} & a & b-c & \frac{b-c}{b-a}=x \\ c & & & \\ & b & \frac{c-a}{\overline{b-a}} & \frac{c-a}{b-a}=y \end{array}$$

Man siehet hieraus, daß die vorgeschriebene Regel, die nemlichen Werthe von x und y heraus bringet, und daß sie folglich ihre Richtigkeit hat. Es bleibet nun noch übrig zu beweisen, daß, wie im vierten Exempel geschehen ist, die drei gegebenen Werthe mit einer nemlichen Zahl multiplizirет werden können, ohne daß dadurch das Verhältniß der Vermischung gestöret werde. Man multiplizire a, b und c mit m, und mache dann die Alligazion.

$$\begin{array}{r|l|l}
am & bm - cm & \frac{bm - cm}{bm - am} = \frac{b - c}{b - a} = x \\
cm & & \\
bm & cm - am & \frac{cm - am}{bm - am} = \frac{c - a}{b - a} = y \\
\hline
 & bm - am &
\end{array}$$

Aus dieser Rechnung siehet man, daß x und y den nemlichen Werth behalten, wenn a, b und c mit m das ist, womit man will, multipliziret werden.

§. 9.

Wenn mehr als zweierlei Dinge zu vermischen sind, so wird die Vermischung meistens unbestimmt. In diesem Falle schreibe man alle gegebene Werthe der Ordnung nach unter einander, vom kleinsten bis zum größten, oder vom größten bis zum kleinsten. Man merke, zwischen welchen zwei Werthen der gemeine Werth fällt, und schreibe ihn linker Hand neben dem gefundenen Zwischenraume. Nun alligire man nach Anleitung des vorigen Paragraphs, und in welcher Ordnung man will, allemal einen Werth der kleiner ist als der gemeine, mit einem der größer ist als der gemeine. Es schadet nicht, wenn man auch den nemlichen gegebenen Werth mehr als einmal mit einem anderen alligiret. Wenn dieses geschiehet, so muß man das zweite mal die gefundene Differenz mit dem Addizionszeichen neben der vorigen schreiben, und eben so das dritte mal, u. s. f. Man addire zulezt alle Differenzen. Man dividire jede Differenz durch die Summe aller Differenzen, so hat man die Verhältnisse, wornach die Mischung geschehen soll.

Exempel I. Man hat verschiedene Weine, zu 4 Groschen das Maaß, zu 8 Groschen, zu 16 Groschen, und zu 17 Groschen. Wie kann man diese Weine mischen, daß das Maaß 15 Groschen koste?

	4	1	$\frac{1}{21}$
	8	2	$\frac{2}{21}$
15	16	11	$\frac{11}{21}$
	17	7	$\frac{7}{21}$
		21	

oder

	4	2	$\frac{2}{21}$
	8	1	$\frac{1}{21}$
15	16	7	$\frac{7}{21}$
	17	11	$\frac{11}{21}$
		21	

In der ersten Rechnung ist erstlich 4 mit 16 alligiret worden, und hernach 8 mit 17. In der zweiten ist 4 mit 17, und 8 mit 16 alligiret worden, woraus eine andere Vermischung entstanden ist.

Exempel II. 8löthiges, 9löthiges, 11löthiges, 12löthiges und 15löthiges Silber soll gemischet werden, so daß es 14löthig werde.

	8	1	$\frac{1}{20}$
	9	1	$\frac{1}{20}$
	11	1	$\frac{1}{20}$
	12	1	$\frac{1}{20}$
14	15	$6+5+3+2=16$	$\frac{16}{20}$
		20	

Weil hier nur ein größerer Werth als der gemeine ist, so musten alle mit diesem einzigen alligiret werden.

Exempel III. Dreierlei Getreide, das Maaß zu $\frac{3}{4}$ Thaler, zu $1\frac{1}{2}$ Thaler, und zu $1\frac{2}{3}$ Thaler, sollen so vermischet werden, daß das Maaß 1 Thaler zu stehen komme.

	$\frac{3}{4}$, 9	$6+8=14$	$\frac{14}{20}$
1, 12			
	$1\frac{1}{2}$, 18	3	$\frac{3}{20}$
	$1\frac{2}{3}$, 20	3	$\frac{3}{20}$
		20	

Hier sind die Brüche weggeschaffet worden, indem man die Werthe alle mit dem gemeinschaftlichen Nenner 12 multipliziret hat.

Beweis.

Beweis. Laßet uns das erste Exempel vornehmen. Wir haben in der ersten Auflösung 4 mit 16 alligiret und die Differenzen gegen den gemeinen Preis waren 1 und 11, woraus man siehet, daß wenn man 1 Maaß zu 4 Groschen und 11 Maaß zu 16 Groschen zusammengießt, diese 12 Maaß einen Wein zu 15 Groschen das Maaß abgeben. Hernach haben wir 8 mit 17 alligiret, und gefunden, daß 2 Maaß zu 8 Groschen und 7 Maaß zu 17 Groschen, 9 Maaß, das Maaß zu 15 Groschen abgeben. Nimmt man nun die vorigen 12 Maaß zu 15 Groschen und die lezten 9 Maaß zu 15 Groschen zusammen, so bekömmt man 21 Maaß, das Maaß zu 15 Groschen. Diese 21 Maaß bestehen also aus 1 Maaß zu 4 Groschen, 11 Maaß zu 16 Groschen, 2 Maaß zu 8 Groschen, und 7 Maaß zu 17 Groschen. Will man nun anstatt 21 nur 1 Maaß haben, so muß man von jeder Sorte nur den 21ten Theil nehmen, das ist, $\frac{1}{21}$ zu 4 Groschen, $\frac{11}{21}$ zu 16, $\frac{2}{21}$ zu 8, $\frac{7}{21}$ zu 17 Groschen.

In der zweiten Auflösung des ersten Exempels fand man erstlich, daß 2 Maaß zu 4 Groschen und 11 Maaß zu 17 Groschen, $2+11$ Maaß ausmachen, deren gemeiner Werth 15 Groschen ist. Ferner fand man, daß 1 Maaß zu 8 Groschen und 7 Maaß zu 16 Groschen, $1+7$ Maaß zu 15 Groschen das Maaß ausmachen. Nimmt man beide schon gemischte Sorten zusammen, so bekömmt man $2+11+1+7=21$ Maaß, das Maaß zu 15 Groschen, worinn 2 Maaß zu 4 Groschen, 11 Maaß zu 17 Groschen, 1 Maaß zu 8 Groschen, und 7 Maaß zu 16 Groschen enthalten sind. Will man nur 1 Maaß vom Gemischten haben, so wird, wie vorher von jeder Art nur der 21ste Theil genommen.

Im zweiten Exempel fand man, daß 1 Mark zu 8 Loth rein Silber, und 6 Mark zu 15 Loth, $1+6$ Mark zu 14 Loth machen; ferner, daß 1 Mark zu 9 Loth und 5 Mark zu 15 Loth, $1+5$ Mark zu 14 Loth machen; weiter, daß 1 Mark zu 11 Loth, und 3 Mark zu 15 Loth, $1+3$ Mark zu

14 Loth

14 Loth ausmachen; endlich daß 1 Mark zu 12 Loth und 2 Mark zu 15 Loth, 1+2 Mark zu 14 Loth machen. Nimmt man alles zusammen, so bekömt man 20 Mark, die Mark zu 14 Loth, worunter 1 Mark von jeder der 4 ersten Sorten und 16 Mark von der lezten Sorte sind. Will man anstatt 20 Mark nur 1 Mark haben, so nimt man von jeder der vier ersten Sorten $\frac{1}{20}$, und von der lezten Sorte $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$.

Im dritten Exempel ist weiter nichts anzumerken, als die Wegschaffung der Brüche. Um diese zu erhalten, hat man alle Preise mit 12 multipliziret, und man darf sich nur die Einheit, deren Preise angegeben werden, 12 mal größer vorstellen. Z. E. Wenn das Kornmaaß, wovon hier die Rede ist, ein Scheffel ist, so nehme man an dessen Stelle einen Malter der 12 Scheffel enthält. So werden die Preise alle 12 mal größer und die Brüche fallen weg. Man findet alsdenn, daß zu 20 Maltern 14 Malter von der geringsten Sorte, 3 von der anderen, und 3 von der besten genommen werden müssen. Folglich auch zu 20 Scheffel, 14 Scheffel zu $\frac{3}{4}$ Thaler, 3 zu $1\frac{1}{2}$ Thaler, und 3 zu $1\frac{2}{3}$ Thaler. Folglich zu 1 Scheffel $\frac{14}{20}$, $\frac{3}{20}$ und $\frac{3}{20}$.

§. 10.

Die **Cöci-Rechnung** oder **blinde Rechnung**, lehret, wie man Dinge von verschiedenem Werthe vermischen soll, so daß eine gewisse Anzahl der gegebenen Dinge von allen Sorten einen gewissen Werth bekomme, und daß bei der Vermischung keine Brüche, sondern lauter ganze Zahlen entstehen. Dieser lezte Umstand unterscheidet hauptsächlich diese Rechnung von der vorhergehenden Alligazion-Rechnung. Sonst können die meisten hierher gehörenden Aufgaben sowohl durch die eine, als durch die andere Rechnungsart aufgelöset werden.

Das Verfahren bei der Cöci-Rechnung ist folgendes. Man schreibe die Werthe der Dinge, die da vermischet werden sollen, vom größten bis zum kleinesten unter einander.

linker Hand, mit dem kleinesten Werthe in einer Linie, schreibe man die Anzahl der Dinge, welche aus der Vermischung entstehen soll. Rechter Hand, in der nemlichen Linie, setze man den ganzen Werth, welchen die vermischten Dinge zusammen haben sollen. Man vergleiche den kleinsten Werth mit den übrigen, und setze die Differenz jedesmal neben der größeren Zahl. Man multiplizire den kleinesten Werth mit der ganzen Anzahl der Dinge. Das Produkt subtrahire man von dem ganzen Werthe der zur Rechten stehet. Was übrig bleibet, suche man so einzutheilen, daß die Theile lauter Multipla der Differenzen seyen. Die Multiplikatoren müssen aber zusammen weniger ausmachen, als die ganze Anzahl der Dinge. Diese Multiplikatoren geben die Anzahl der Dinge jeder Art vom grösseren Werthe. Subtrahiret man ihre Summe von der ganzen Anzahl der Dinge, so giebet der Rest die Anzahl der Dinge vom geringsten Werthe.

Exempel I. Es sollen Ochsen, das Stück zu 10 Thaler, Schweine, das Stück zu 4 Thaler, und Schafe, das Stück zu 2 Thaler, so eingekaufet werden, daß 100 Stück Vieh, 540 Thaler zu stehen kommen. Wie viel muß man von jeder Art nehmen?

	10	8	
	4	2	
100	2		540
		subtr.	200 = 100 × 2
			340

$$
\begin{aligned}
340 &= 8 \times 24 + 2 \times 74 \\
&= 8 \times 25 + 2 \times 70 \\
&= 8 \times 26 + 2 \times 66 \\
&= 8 \times 27 + 2 \times 62 \\
&= 8 \times 28 + 2 \times 58 \\
&= 8 \times 29 + 2 \times 54 \\
&= 8 \times 30 + 2 \times 50 \\
&= 8 \times 31 + 2 \times 46
\end{aligned}
$$

= 8 × 32

$8 \times 32 + 2 \times 42$
$8 \times 33 + 2 \times 38$
$8 \times 34 + 2 \times 34$
$8 \times 35 + 2 \times 30$
$8 \times 36 + 2 \times 26$
$8 \times 37 + 2 \times 22$
$8 \times 38 + 2 \times 18$
$8 \times 39 + 2 \times 14$
$8 \times 40 + 2 \times 10$
$8 \times 41 + 2 \times 6$
$8 \times 42 + 2 \times 2$

Hier müssen 340 in zwei Theile getheilet werden, so daß der eine ein Multiplum von 8 und der andere ein Multiplum von 2 sey, und daß beide Multiplikatoren zusammen weniger als 100 ausmachen. Versuchet man die Differenz 8 weniger als 24 mal zu nehmen, z. E. 20 mal, so machet 8×20, 160, folglich fehlen noch 180 zu den 430, diese 180 machen 2×90. Aber die Multiplikatoren 20 und 90 machen 110, also mehr als 100, und folglich können sie nicht gebrauchet werden. Ueber 24 können hier alle folgenden Zahlen bis 42 gebrauchet werden. Ueber 42 kann man nicht gehen, sonst bleibet kein Multiplum von 2 übrig.

Die Multiplikatoren von 8 zeigen hier die Anzahl der Ochsen an, und die Multiplikatores von 2 bedeuten die Anzahl der Schweine. Wenn man die Summe beider Zahlen von 100 subtrahiret, so bekömmt man die Anzahl der Schafe. Z. E. Die erste Eintheilung von 340 gab $8 \times 24 + 2 \times 74$. Man muß also nehmen 24 Ochsen und 74 Schweine, zusammen 98 Stück Vieh, und die 2 die an 100 fehlen, müssen Schafe seyn.

Man siehet also, daß 19 Auflösungen der gegebenen Fragen möglich sind. Wir wollen nur die drei ersten hierher setzen.

24 Ochsen	zu 10 Thaler,	machen	240 Thaler
74 Schweine	zu 4 : :	: :	296 : :
2 Schafe	zu 2 : :	: :	4 : :
100 Stück Vieh			540 Thaler.

25 Ochsen,	zu 10 Thaler,	machen	250 Thaler
70 Schweine	zu 4 : :	: :	280 : :
5 Schafe	zu 2 : :	: :	10 : :
100 Stück Vieh			540 Thaler.

26 Ochsen,	zu 10 Thaler,	machen	260 Thaler
66 Schweine	zu 4 : :	: :	264 : :
8 Schafe	zu 2 : :	: :	16 : :
100 Stück Vieh			540 Thaler.

und so kann man die Richtigkeit aller übrigen Auflösungen versuchen.

Um sich bei diesem und ähnlichen Fällen das überflüßige Versuchen zu ersparen, kann man sogleich die Gränzen bestimmen, welche die Faktoren nicht überschreiten können. Es sey der Faktor, womit 8 multipliziret wird $= x$, der andere, womit 2 multipliziret wird, sey y, so muß erstlich $x + y$ kleiner seyn, als 100, oder

$$x + y < 100 \qquad (A$$

Hernach sollen $8x + 2y$ zusammen allemal 340 ausmachen, also

$$8x + 2y = 340 \qquad (B$$

Man multiplizire die Ungleichung A mit 8 und subtrahire die Gleichung B,

$$\begin{array}{rl} & 8x + 8y < 800 \\ \text{subtr.} & 8x + 2y = 340 \\ \hline & 6y < 460 \\ & y < 76\tfrac{2}{3} \qquad (C \end{array}$$

Ferner

Ferner multiplizire man die Ungleichung A mit 2, und subtrahire sie von der Gleichung B

$$\begin{array}{l} 8x + 2y = 340 \\ \underline{2x + 2y < 200} \\ 6x \;.\;.\;. > 140 \quad \text{(II Hauptst. §. 25)} \\ \qquad x > 23\tfrac{1}{3} \quad \text{(D} \end{array}$$

Also siehet man aus den Ungleichungen D und C sogleich, daß x größer als $23\frac{1}{3}$, also in ganzen Zahlen wenigstens $=24$ angenommen werden muß, und daß y unter $76\frac{2}{3}$ versuchet werden muß, wenn man nemlich y vor x suchen wollte: denn sonst bestimmet sich y von selbst, so bald man x bestimmet hat.

Exempel II. In einem Gasthause haben 13 Personen, Männer, Frauen und Jungfern 4 Thaler 22 Groschen, oder 118 Groschen verzehret, jeder Mann 16 Groschen, jede Frau 10 Groschen, jede Jungfer 5 Groschen. Wie viel waren Männer, wie viel Frauen, wie viel Jungfern? Das verzehrte Geld ist hier als ein Werth oder Preis eines jeden anzusehen.

$$\begin{array}{lrl} & 16 & 11 \\ & 10 & 5 \\ 13 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 118 \\ \underline{65} = 5 \times 13 \\ 53 \end{array}$$

$$53 = 11 \times 3 + 5 \times 4.$$

Wenn man hier versuchet, die Differenz 11, einmal, 2mal oder 4mal zu nehmen, und subtrahiret das Produkt von 53, so siehet man, daß das übrige kein Multiplum von 5 seyn kann. Nur der Multiplikator 3 allein kann hier zur Vervielfältigung der 11 gebrauchet werden, und dann machet das übrige 4 mal 5. Daraus muß man schließen, daß 3 Männer, und 4 Weiber im Gasthause gewesen, und folglich 6 Jungfern.

3 Männer zu	16 Gr.	machen	48 Gr.	
4 Weiber zu	10	: : :	40	:
6 Jungfern zu	5	: : :	30	:
13 Personen.			118 Groschen.	

Exempel III. 14 Personen speisen zusammen, und verzehren, ein Mann 20 Groschen, ein Weib 15 Groschen, eine Jungfer 10 Groschen, ein Kind 5 Groschen, zusammen 180 Groschen, oder 7 Thaler 12 Groschen. Wie viel waren von jeder Art Personen?

	20	15		
	15	10		
	10	5		
14	5			180
			so ist	$70 = 5 \times 14$
				110

$$110 = 15 \times 1 + 10 \times 9 + 5 \times 1$$
$$= 15 \times 2 + 10 \times 7 + 5 \times 2$$
$$= 15 \times 3 + 10 \times 6 + 5 \times 1$$

u. s. f.

Es laßen sich hier sehr viel verschiedene Abwechslungen machen. Die ersten Eintheilungen geben folgende Auflösungen:

	1 Mann zu	20 Gr.,	machet	20 Groschen	
	9 Weiber zu	15	: : :	135	: :
	1 Jungfer zu	10	: : :	10	: :
folglich	3 Kinder zu	5	: : :	15	: :
	14 Personen.			180 Groschen.	

	2 Männer zu	20 Gr.,	machen	40 Groschen	
	7 Weiber zu	15	: : :	105	: :
	2 Jungfern zu	10	: : :	20	: :
folglich	3 Kinder zu	5	: : :	15	: :
	14 Personen.			180 Groschen.	

3 Män=

	3 Männer	zu 20 Gr.,	machen	60	Groschen
	6 Weiber	zu 15 :	: :	90	: :
	1 Jungfern	zu 10 :	: :	10	: :
folglich	4 Kinder	zu 5 :	: :	20	: :
	14 Personen.			180	Groschen.

Exempel IV. Ein Student hat 18 Bücher für 25 Thaler gekaufet, nemlich einige in Folio, zu $2\frac{1}{3}$ Thaler das Stück, einige in Quarto zu $1\frac{3}{4}$ Thaler, einige in Oktavo zu $\frac{1}{2}$ Thaler; wie viel waren von jedem Formate? Hier muß man, um die Brüche wegzuschaffen, sowohl den Werth jeder Art, als auch den ganzen Werth, mit dem gemeinschaftlichen Nenner 12 multipliziren.

	$2\frac{1}{3}$	28	22
	$1\frac{3}{4}$	21	15
18	$\frac{1}{2}$	6	

25 mult. 12

300

subtr. 108 = 6 × 18

192

$$192 = 22 \times 6 + 15 \times 4.$$

Keine andere Eintheilung kann hier statt finden. Ein jedes anderes Multiplum von 22 ausser 22 × 6, wenn es von 192 abgezogen wird, läßt kein Multiplum von 5 übrig. Also:

	6 in Folio	zu $2\frac{1}{3}$	Thaler, machen	14	Thaler.
	4 in Quarto	zu $1\frac{3}{4}$	: : : :	7	: :
folglich	8 in Oktavo	zu $\frac{1}{2}$	: : : :	4	: :
	18 Bücher.			25	Thaler.

Beweis. Wir wollen, anstatt des Beweises das erste Exempel erklären. Gesetzet man hat anfänglich lauter Schafe gekaufet. Da also 100 Stück gekaufet wor-

den, und das Stück 2 Thaler kostet, so hat man ausgegeben 100 × 2 Thaler. Man hat aber 540 Thaler Geld, die Hundert Stück Vieh einzukaufen. Es bleiben also 340 Thaler übrig. Für diese 340 Thaler kann ich nun einige Ochsen und Schweine gegen eben so viel Schaafe eintauschen, wenn ich nur für jeden Ochsen 8 Thaler und für jedes Schwein 2 Thaler zulege, weil ein Ochs 8 Thaler mehr, und ein Schwein 2 Thaler mehr kostet, als ein Schaf. Z. E. Man tauschet 24 Ochsen und 74 Schweine gegen 98 Schaafe ein, so leget man 24 mal 8 Thaler und 74 mal 2 Thaler zu, welches zusammen die übriggebliebenen 340 Thaler ausmachet; weil man nun nichts mehr zuzusetzen hat, so behält man noch 2 Schaafe. Für die übriggebliebenen 340 Thaler kann man auch 25 Ochsen und 70 Schafe, oder 26 Ochsen und 66 Schaafe, u. s. f. eintauschen. u. s. f.

Was die Wegschaffung der Brüche betrift, so wollen wir dieselbe im 4ten Exempel erklären. Gesetzt, die Bücher kosteten jedes 12mal mehr als es wirklich gekostet hat, so würden auch alle 18 Bücher 12mal mehr kosten als 25 Thaler; übrigens würde dadurch in der Menge der Bücher jeder Art nichts geändert werden. Man kann also, um der Bequemlichkeit der Rechnung willen, sowohl den Werth jedes Dinges, als auch den ganzen Werth aller Dinge, mit einem nemlichen Multiplikator multipliziren.

§. 11.

Alle hierher gehörende Fragen können sowohl durch die Alligazion-Rechnung, als durch die Cöci-Rechnung aufgelöset werden.

Exempel I. 10löthig und 14löthig Silber soll so gemischet werden, daß es 11löthig werde. Die Auflösung durch die Alligazion-Rechnung ist folgende:

	14	1	$\frac{1}{4}$
11			
	10	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

Also

Also muß auf eine jede Quantität $\frac{1}{4}$ vom 14löthigen und $\frac{3}{4}$ vom 10löthigen Silber genommen werden. Will man das nemliche Exempel nach der Cöci-Rechnung auflösen, so sage man 1 Mark vermischten Silbers, zu 10 Loth und zu 14 Loth rein Silber, soll enthalten 11 Loth rein Silber, wie viel muß von jeder Art genommen werden?

	14	4	
1	10		11
			subtr. 10 = 10 × 1
			1
			div. 4) $\frac{1}{4}$ zu 14 Loth rein.
			folgl. $\frac{3}{4}$ zu 10 Loth rein.

Exempel II. Man will Wein mischen, zu 18 und zu 13 Groschen das Maaß, so daß 100 Maaß 1500 Groschen oder 62 Thaler 12 Groschen zu stehen kommen. Da 100 Maaß 1500 Groschen zu stehen kommen, so muß 1 Maaß des gemischten 15 Groschen kosten. Also, nach der Alligazion-Rechnung,

	18	2	$\frac{2}{5}$
15			
	13	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$

Es müssen also $\frac{2}{5}$ von 100 Maaß, das ist 40 Maaß zu 18 Groschen, und $\frac{3}{5}$ von 100 Maaß, das ist, 60 Maaß zu 13 Groschen zusammengenommen werden. Nach der Cöci-Rechnung ist das Verfahren folgendes:

	18	5	
100	13		1500
			subtr. 1300 = 100 × 13
			div. 5) 200
			40 Maaß zu 18 Gr.
			folgl. 60 Maaß zu 13 Gr.

Weil in diesen beiden Exempeln nur zwei Sachen zu vermischen sind, so ist auch jedesmal nur eine Auflösung möglich. Nachdem man also in der Cöci=Rechnung, wie gewöhnlich, die Subtrakzion verrichtet hat, so muß der Rest nothwendig ein Multiplum der einzigen Differenz seyn, die da vorhanden ist. Um aber zu finden, welches Multiplum er ist, so darf man nur den Rest durch die Differenz dividiren. Der Quozient zeiget an, womit die Differenz multipliziret werden müsse, daß sie dem Reste gleich werde, und der gefundene Multiplikator ist die Anzahl der Dinge von der kostbarsten Art, die man in der Vermischung gebrauchen soll.

Exempel III. Es sollen dreierlei Arten Gewürze so mit einander gemischet werden, daß das Pfund 12 Groschen koste. Es kostet aber das Pfund von der einen Art 18 Groschen von der anderen 16 Groschen, und von der dritten Art 6 Groschen.

				oder
	18	6	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{11}$
12	16	6	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{11}$
	6	4 + 6 = 10	$\frac{10}{22}$	$\frac{5}{11}$
		22		

Die Alligazion=Rechnung giebt hier nur eine Antwort auf die Frage. Laßt uns das nemliche Exempel nach der Cöci=Rechnung versuchen.

	18	12		
	16	10		
1 Pf. zu	6		soll kosten	12
			subtr.	$6 = 6 \times 1$
			Rest	6

Hier soll der Rest 6 so eingetheilet werden, daß der eine Theil ein Multiplum von 12 und der andere ein Multiplum von 10 sey; welches auch möglich ist, da man bei der Vermi=

schung

schung des Gewürzes gar wohl Brüche annehmen kann. Es sey also die Menge des besten Gewürzes $= x$, und die Menge des zweiten zu 16 Groschen $= y$, so muß seyn

$$12x + 10y = 6$$
$$10y = 6 - 12x$$
$$y = \frac{6}{10} - \frac{12x}{10}$$

Wenn also y positiv werden soll, so muß angenommen werden

$$\frac{6}{10} > \frac{12x}{10}$$
$$6 > 12x$$
$$\frac{6}{12} > x$$
$$\frac{1}{2} > x$$

Folglich muß x unter $\frac{1}{2}$ angenommen werden. Es sey $x = \frac{1}{3}$, so ist $12x = 4$, also bleiben noch 2 vom Reste 6 übrig. Diese 2, durch die andere Differenz 10 dividiret, geben $\frac{1}{5}$. Also ist

$$6 = 12 \times \tfrac{1}{3} + 10 \times \tfrac{1}{5} \quad (A$$

Nimmt man an, es sey $x = \frac{1}{4}$, so ist $12x = 3$, und vom Reste 6 bleiben noch 3. Diese, durch 10 dividiret, geben $\frac{3}{10}$. Also ist auch

$$6 = 12 \times \tfrac{1}{4} + 10 \times \tfrac{3}{10} \quad (B$$

Nimmt man an, es sey $x = \frac{1}{5}$, so ist $12x = \frac{12}{5}$, dieses von 6 subtrahiret, giebt $\frac{18}{5}$ zum Reste, wenn man nun durch 10 dividiret, so kömt $\frac{18}{50} = \frac{9}{25}$, es ist also

$$6 = 12 \times \tfrac{1}{5} + 10 \times \tfrac{9}{25} \quad (C$$

Und so kann man andere Eintheilungen machen, so lange x und y zusammen weniger als 1 ausmachen. Wenn man nun die angenommenen Werthe von x und y aus den Gleichungen A, B und C addiret, nud von 1 subtrahiret, so bekömt man die Quantität, die vom dritten oder schlech-

testen

testen Gewürze genommen werden soll, und die Mischung kann folgendermaßen geschehen:

$\frac{1}{3}$	zu 18 Groschen,	machet	6 Groschen.
$\frac{1}{5}$	zu 16 Groschen,	: :	$3\frac{1}{5}$: :
$\frac{7}{15}$	zu 6 Groschen,	: :	$2\frac{4}{5}$: :
1 Pfund			12 Groschen.

$\frac{1}{4}$	zu 18 Groschen,	machet	$4\frac{1}{2}$ Groschen.
$\frac{3}{10}$	zu 16 Groschen,	: :	$4\frac{4}{5}$: :
$\frac{9}{20}$	zu 6 Groschen,	: :	$2\frac{7}{10}$: :
1 Pfund			12 Groschen.

$\frac{1}{5}$	zu 18 Groschen,	machet	$3\frac{3}{5}$ Groschen.
$\frac{9}{25}$	zu 16 Groschen,	: :	$5\frac{19}{25}$: :
$\frac{11}{25}$	zu 6 Groschen,	: :	$2\frac{16}{25}$: :
1 Pfund			12 Groschen.

Zwischen den angenommenen Werthen für x können noch unendlich viel andere eingeschaltet werden, wozu sich ebenfalls der gehörige Werth für y finden wird. Z. E. Zwischen $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{1}{4}$ kann noch angenommen werden: $x = \frac{31}{96}, \frac{30}{96}, \frac{29}{96}, \frac{28}{96}, \frac{27}{96}, \frac{26}{96}, \frac{25}{96}$, und zwischen diesen Werthen von x können wiederum soviel eingeschaltet werden als man will. Es ist also die Anzahl der Auflösungen in der That unendlich, obgleich die Alligazion-Rechnung nur eine einzige angiebet.

Exempel IV. 11 Gäste haben 99 Groschen verzehret, jeder Mann 12 Groschen, jede Frau 8 Groschen und jede Jungfer 5 Groschen. Wie viel waren von jedem Geschlechte zugegen? Will man die Alligazion-Rechnung gebrauchen, so kömt auf jede Person, eins ins andere gerechnet,

rechnet, $\frac{99}{11} = 9$ Groschen, als der Werth des Vermischten.

$$\begin{array}{c|c|c|c} 9 & 12 & 1+4 & \frac{5}{11} \\ & 8 & 3 & \frac{3}{11} \\ & 5 & 3 & \frac{3}{11} \\ \cline{3-3} & & 11 & \end{array}$$

Es waren also von der ganzen Gesellschaft $\frac{5}{11}$ Männer, $\frac{3}{11}$ Frauen, und $\frac{3}{11}$ Jungfern, das ist, 5 Männer, 3 Frauen und 3 Jungfern. Laßt uns jezt nach der Cöci-Rechnung verfahren.

$$\begin{array}{cc|c} & 12 & 7 \\ & 8 & 3 \\ 11 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 99 \\ \text{subtr.} & \underline{55} = 11 \times 5 \\ & 44 \end{array}$$

$$44 = 7 \times 5 + 3 \times 3$$

Weil hier ganze Zahlen erfordert werden, so kömt nur eine Auflösung heraus, nemlich 5 Männer und 3 Weiber, folglich 3 Jungfern.

Anmerkung. Man siehet aus den vier vorhergehenden Exempeln, daß die Alligazion-Rechnung den Vortheil hat, daß dabei kein Versuchen Statt findet, sondern die Antwort gerades Weges gefunden wird. Anderseits aber, giebet sie bei unbestimmten Aufgaben bei weiten nicht alle mögliche Antworten, welche man durch die Cöci-Rechnung erhalten kann. Uebrigens sind diese beiden Rechnungsarten, seitdem die Algebra häufig gebrauchet wird, beinahe in Vergessenheit gerathen. Sie haben aber doch ihren Nutzen, und sind keines Weges zu verachten; indem man, vermittelst derselben, manche Aufgabe weit geschwinder auflösen kann, als wenn man erst algebraische Gleichungen aufsetzen wollte.

Drei-

Dreizehntes Hauptstück.

Von den Funkzionen.

§. 1.

Eine Funkzion zweier oder mehrerer Größen, ist eine Größe, welche aus der Verbindung derselben, vermittelst der verschiedenen einfachen Rechnungsarten, entstehet.

Also sind die Summe, das Produkt, der Quozient, die Potenzen oder Wurzeln, die Logarithmen einiger gegebenen Größen, lauter Funkzionen derselben.

Z. E. $a \pm b$, ab, $\frac{a}{b}$, a^b, $\sqrt[b]{a}$, $\frac{a}{b}$, sind Funkzionen von a und b.

Und weil jede komplexe Größe als die Summe oder Differenz ihrer Glieder angesehen werden kann, so ist jede komplexe Größe eine Funkzion nicht nur ihrer Sätze sondern auch der einzelnen Größen aus denen die Sätze entstanden sind. Z. E. $abc \pm \sqrt[b]{\frac{a}{c}} \pm \frac{a+c}{b}$ ist eine Funkzion von a, b, und c.

§. 2.

Wenn in einer Funkzion eine Größe oder mehrere Größen zunehmen oder abnehmen, so ist es natürlich daß der Werth der ganzen Funkzion entweder größer oder kleiner werden muß. Dieses haben wir schon bei jeder Rechnungsart insbesondere gesehen. Wir haben auch bestimmet, um wie viel die Summe oder der Rest, oder das Produkt, oder der Quozient, oder die Potenz größer oder kleiner werden, wenn die gegebenen Größen zunehmen oder abnehmen. Diese wichtige Lehre von der Abnahme und

Zunahme der Funkzionen, werden wir bald genauer und im Allgemeinen abhandeln. Vorher aber wollen wir noch die Beschaffenheit der Funkzionen und ihre Verwandlungen betrachten.

§. 3.

Eine **veränderliche Größe** (quantité variable) ist diejenige, welche man sich vornimmt in einer Funkzion zu vergrößern oder zu verkleinern, um zu erfahren, welcher Unterschied dadurch in der Funkzion selbst entstehen wird. Diejenigen Größen welchen man ihren Werth laßen will, ohne ihn zu vergrößern oder zu verkleinern, heissen **beständige Größen** (quantités constantes).

Z. E. Ich will erfahren, um wie viel das Produkt ab zunimmt, wenn der Faktor b allein um c größer wird. So ist hier a eine beständige, und b eine veränderliche Größe. Gesetzet b nehme um c zu, so habe ich anstatt ab, $a(b+c) = ab + ac$. Dieses Produkt ist um ac größer, als das vorige ab. Will ich aber im Produkte ab, sowohl a als b vergrößern, so sind a und b als veränderliche Größen anzusehen. Gesetzet also, a werde größer um d, und b werde größer um c, so bekomme ich $(a+d)(b+c) = ab + bd + ac + cd$, woraus ich sehe, daß das Produkt um $bd + ac + cd$ größer geworden ist.

§. 4.

Um die veränderlichen Größen von den beständigen besser zu unterscheiden, und um sich zu erinnern, welche Größen verändert werden, und welche man unverändert läßt, pfleget man die veränderlichen mit z, y, x, u. s. f., wie die unbekannten Größen, zu bezeichnen. Die beständigen werden mit a, b, c, u. s. f. bemerket.

Will ich also die Veränderung des Produktes ab erfahren, wenn b allein geändert wird, so schreibe ich anstatt ab bequemer ax oder ay, u. s. f. Will ich beide Faktoren verändern, so schreibe ich xy, oder yz, u. s. f.

§. 5.

Um kürzer zu reden, benennet man oft nur die veränderlichen Größen in einer Funkzion. Z. E. Anstatt zu sagen $(ax+cy)^m$ ist eine Funkzion von x, y, a, c und m, saget man bloß $(ax+cy)^m$ ist eine Funkzion von x und y, weil die Größen a, c und m, welche unverändert bleiben sollen, weniger in Betrachtung kommen.

§. 6.

Eine razionale Funkzion ist diejenige, wo die veränderlichen Größen keine Wurzelzeichen oder gebrochene Exponenten bei sich führen. Eine irrazionale Funkzion ist diejenige, wo die veränderlichen Größen unter dem Wurzelzeichen stehen, oder gebrochene Exponenten haben. Z. E. $\sqrt{(a^2-x^2)}$ oder $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist eine irrazionale Funkzion von x. Hingegen ist $x\sqrt{(a^2-b^2)}$ eine razionale Funkzion von x.

§. 7.

Eine ganze Funkzion ist diejenige, wo keine veränderliche Größen als Nenner oder Divisoren vorkommen. Eine gebrochene Funkzion hingegen ist diejenige, wo Brüche vorkommen, die im Nenner veränderliche Größen haben. Z. E.

$$axy \pm \frac{x^2}{b} \pm \frac{y^2}{c} \text{ oder } axy \pm \frac{1}{b}x^2 \pm \frac{1}{c}y^2$$

ist eine ganze Funkzion von x. Aber

$$xy \pm \frac{a-b}{x+y} \pm \frac{c}{x^2}$$

ist eine gebrochene Funkzion von x und y.

§. 8.

Eine homogene Funkzion ist eine jede, wo alle Sätze gleich viel veränderliche Dimensionen oder Faktoren haben. Eine heterogene Funkzion ist diejenige, wo nicht alle

alle Sätze gleich viel veränderliche Dimensionen haben. Z. E.

$$ax^2y \pm bxy^2 \pm cx^3 \pm dy^3$$

ist eine homogene Funkzion von x und y, weil in jedem Satze drei veränderliche Faktoren enthalten sind, welches am deutlichsten wird, wenn man die Potenzen ohne Exponenten schreibet, nemlich

$$axxy \pm bxyy \pm cxxx \pm dyyy$$

oder noch deutlicher, wenn man den veränderlichen Größen denselbigen Namen giebet, in welchem Falle in allen Sätzen die nemliche Potenz der unbekannten Größe entstehet. Z. E. Man schreibe z anstatt x und y, so bekömt man

$$az^3 \pm bz^3 \pm cz^3 \pm dz^3$$

Folgende Funkzion ist heterogen:

$$ax^2 \pm bxyz \pm cz^4$$

Denn wenn man v anstatt x, y und z schreibet, so bekömt man

$$av^2 \pm bv^3 \pm cv^4$$

wo die veränderliche Potenzen und folglich die veränderlichen Dimensionen ungleich sind.

§. 9.

Die Ordnung oder der Grad einer Funkzion, wird nach der größten Anzahl der veränderlichen Faktoren in einem Gliede gerechnet. Z. E.

$$ax \pm bxy \pm cx^2y$$

ist eine heterogene Funkzion der Größen x und y vom dritten Grade oder von der dritten Ordnung, weil cx^2y drei veränderliche Dimensionen enthält. Diese Funkzion

$$axyz \pm bx^2z \pm cxz^2 \pm dxy^2$$

ist eine homogene Funkzion der Größen x, y und z vom 3ten Grade, weil alle Glieder drei veränderliche Dimensionen haben.

§. 10.

Bei gebrochenen Funkzionen findet man am bequemsten den Grad derselben, wenn man alle veränderliche Größen durch den nemlichen Buchstaben andeutet, und dann den Bruch so kurz als möglich ausdrücket. Z. E. Diese Funkzion

$$\frac{axy^2 + bx^3 + cx^2y}{ax + by}$$

wird, wenn x und y durch v ausgedrücket werden,

$$\frac{av^3 + bv^3 + cv^3}{av + bv}$$

$$\text{oder } \frac{av^2 + bv^2 + cv^2}{a + b}$$

$$\text{oder } \left(\frac{a + b + c}{a + b}\right) v^2$$

Woraus man siehet, daß die gegebene Funkzion vom zweiten Grade, oder von zwei Dimensionen ist. Folgende Funkzion

$$\frac{ay^3}{bxyz + cx^3}$$

wird, wenn x, y und z durch v ausgedrücket werden,

$$\frac{av^3}{bv^3 + cv^3}$$

$$\text{oder } \frac{a}{b + c}$$

$$\text{oder } \left(\frac{a}{b + c}\right) v^0$$

In

In diesem Falle ist die Funkzion von o Dimensionen. Folgende Funkzion

$$\frac{ax}{bx^2y^2 + cyz^3}$$

wird, wenn x, y und z durch v ausgedrücket werden,

$$\frac{av}{bv^4 + cv^4}$$

oder $$\frac{a}{bv^3 + cv^3}$$

oder $$\left(\frac{a}{b + c}\right) v^{-3}$$

Hier ist die Funkzion von — 3 Dimensionen, das heißt, es sind im Nenner 3 veränderliche Dimensionen mehr, als im Zähler.

§. 11.

Will man Formeln haben, welche alle mögliche ganze und razionale Funkzionen einer, zweier oder mehrerer veränderlicher Größen vorstellen; so mache man alle mögliche mittlere Verwechslungen (V. Hauptst. §. 23) der veränderlichen Größen. Vor jeder Verwechslung schreibe man einen beständigen Koeffizienten, und ganz voran setze man noch einen bloß beständigen Satz, wenn man nemlich heterogene Funkzionen verlanget. Soll aber die Formel hemogen seyn, so fällt der bloß beständige Satz weg, und man behält nur die Verwechslungen von gleichviel Dimensionen.

I) Eine einzige veränderliche Größe x kann nicht anders, als mit sich selbst verbunden werden, woraus ihre auf einander folgende Potenzen entstehen. Die allgemeine Formel für alle heterogene Funkzionen von x ist also

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

wo die Koeffizienten a, b, c, d, c, f, allerlei beständige Größen vorstellen, sie mögen übrigens positiv oder negativ seyn.

II) Wenn man für x und y die mittleren Verwechslungen machet, so bekömt man

Einfache	x, y
Zweifache	xx, xy, yy
Dreifache	xxx, xxy, xyy, yyy
Vierfache	$xxxx, xxxy, xxyy, xyyy, yyyy.$
	&c. &c.

Hieraus siehet man, daß die Formel für alle mögliche heterogene Funkzionen von x und y seyn wird

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + ky^3 + \&c.$$

Soll die Formel für eine Funkzion vom $n$ten Grade gelten, so muß man beim $n$ten Grade der Verwechslungen aufhören. Soll die Formel eine homogene Funkzion vorstellen, so muß man nur die Verwechslungen von einem einzigen Grade nehmen. Also werden alle homogene Funkzionen von x und y seyn:

von einer Dimension

$$ax + by$$

von zwei Dimensionen

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

von drei Dimensionen

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

von n Dimensionen

$$ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + dx^{n-3}y^3 + \&c. \ldots + hy^n$$

Und weil die heterogene Funkzion $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 +$ u. s. f. alle auf einander folgende homogene Funkzionen von x uud y in sich begreifet, so kann man jede heterogene Funkzion von x und y, in umgekehrter Ordnung also vorstellen:

$$ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + dx^{n-3}y^3 + \&c.\ldots hy^n$$
$$+ a'x^{n-1} + b'x^{n-2}y + c'x^{n-3}y^2 + d'x^{n-4}y^3 + \&c.\ldots h'y^{n-1}$$
$$+ a''x^{n-2} + b''x^{n-3}y + c''x^{n-4}y^2 + d''x^{n-5}y^3 + \&c.\ldots h''y^{n-2}$$
$$+ \&c.\ \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots + k$$

Man siehet hier, daß jede folgende Zeile eine homogene Funkzion von x und y vorstellet, die eine Dimension weniger hat als die vorige. Zulezt kömt noch eine beständige Größe k, welche mit der Größe a in der Funkzion $a + bx + cy + dx + \&c.$ einerley ist.

III) Für drei veränderliche Größen x, y und z, bekömt man folgende mittlere Verwechslungen:

Einfache x, y, z
Zweifache xx, xy, xz, yy, yz, zz
Dreifache xxx, xxy, xxz, xyy, xyz, xzz, yyy, yyz, yzz, zzz.
&c. &c.

Folglich kann eine heterogene Funkzion der Größen x, y und z, vom dritten Grade, also vorgestellet werden:

$$a + bx + cy + dz + ex^2 + fxy + gxz + hy^2 + iyz$$
$$+ kz^2 + lx^3 + mx^2y + nx^2z + \&c.\ \&c.$$

Man siehet, daß hier wiederum die heterogene Funkzion aus lauter homogenen bestehet. Es sind nemlich die homogenen Funkzionen von x, y und z, folgende:

Von einer Dimension
$$ax + by + cz$$
Von zwei Dimensionen
$$ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$$
Von drei Dimensionen
$$ax^3 + bx^2y + cx^2z + dxy^2 + exyz + fxz^2 + gy^3$$
$$+ hy^2z + iyz^2 + kz^3$$

§. 12.

Man kann sich auch vorstellen, daß die Funkzionen von höheren Graden aus der Multiplikazion einfacher Funkzionen entstehen. Man multiplizire z. E. diese einfache Funkzionen

$$a + dx$$
$$b + ex$$
$$c + fx$$

so wird entstehen:

$$abc + (bcd + ace + abf)x + (cde + bdf + aef)x^2 + defx^3$$

Dieses gefundene Produkt kann nun alle Funkzionen einer einzigen veränderlichen Größe vom dritten Grade vorstellen.

Wenn man sezet, die einfachen Funkzionen, woraus die zusammengesezte entstanden ist, seyen alle = o, so wird die gefundene Funk ion selbst = o. Nemlich, wenn man folgende Gleichungen mit einander multipliziret:

$$a + dx = 0$$
$$b + ex = 0$$
$$c + fx = 0$$

so bekömt man

$$abc + (bcd + ace + abf)x + (cde + bdf + aef)x^2 + def.x^3 = 0$$

oder wenn man alle Säze durch *def* dividiret:

$$\frac{abc}{def} + \left(\frac{bc}{ef} + \frac{ac}{df} + \frac{ab}{de}\right)x + \left(\frac{c}{f} + \frac{b}{e} + \frac{a}{d}\right)x^2 + x^3 = 0$$

Dieses ist eine vollständige Gleichung vom dritten Grade. Löset man sie auf, so muß man deren Wurzeln finden, nemlich

$$x + \frac{a}{d} = 0 \text{ oder } a + dx = 0$$

$$x + \frac{b}{e} = 0 \text{ oder } b + ex = 0$$

$$x + \frac{c}{f} = 0 \text{ oder } c + fx = 0$$

Und

Und diese Wurzeln sind zugleich die Faktoren der gegebenen Funkzion. Aus dieser Bemerkung entstehet die Auflösung folgender Aufgabe.

§. 13.

Aufgabe.

Die Faktoren finden, woraus eine Funkzion der Größe x entstanden ist, oder entstehen kann.

Auflösung. Man setze, die ganze Funkzion sey $=0$. Man löse die Gleichung auf. Die einfachen Gleichungen, welche die Wurzeln ausdrücken, werden zugleich die verlangeten Faktoren geben.

Exempel. Man verlanget die einfachen Faktoren dieser Funkzion

$$x^3 + 4x^2 + x - 6$$

Man setze $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$
und löse die Gleichung auf. Weil hier der lezte Saz 6 durch 1, 2 und 3 gemessen wird, so versuche man, ob die Gleichungen $=0$ wird, wenn man annimmt

$$x = \pm 1$$
$$x = \pm 2$$
$$x = \pm 3$$

Man wird finden, daß die Gleichung verschwindet, wenn

$x = +1$ oder $x - 1 = 0$
oder $x = -2$ oder $x + 1 = 0$
oder $x = -3$ oder $x + 3 = 0$

Folglich ist

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1).(x + 2).(x + 3)$$

§. 14.

Alle razionale und gebrochene Funkzionen von x können durch diese Formel vorgestellet werden:

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \&c.}$$

 oder

oder wenn der Nenner mehr Dimensionen haben soll als der Zähler

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c. \ldots + hx^s}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \&c. \ldots + h'x^{s+1}}$$

Denn I) wie auch die Säze der gebrochenen Funkzion beschaffen seyn mögen, so kann man sie alle unter einen Nenner bringen. Alsdann müssen so wohl der Zähler als der Nenner ganze Funkzionen von x seyn, welche diese Form haben

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$

und $a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \&c.$

Und wenn einige Säze mangeln, so kann man sie vermittelst des Koeffizienten o ersezen.

II) Wenn negative Exponenten im Bruche vorhanden sind, so multiplizire man sowohl den Zähler als den Nenner mit x^m, gesezet daß $-m$ der größte negative Exponent ist. Es sey diese Funkzion gegeben

$$\frac{ax + bx^{-3}}{c + dx^{-4} + x^3}$$

Weil hier -4 der größte negative Exponent ist, so multiplizire man oben und unten mit x^4, so kömmt

$$\frac{ax^5 + bx}{cx^4 + d + x^7}$$

Werden nur die Säze gehörigermaßen geordnet, so bekömmt der Bruch diese regelmäßige Gestalt

$$\frac{0 + bx + 0.x^2 + 0.x^3 + 0.x^4 + ax^5 + 0.x^6}{d + 0.x + 0.x^2 + 0x^3 + cx^4 + 0.x^5 + 0.x^6 + 1.x^7}$$

Man siehet hier zugleich, daß man, vermittelst des Koeffizienten o, den Zähler so einrichten kann, daß er eine Dimension weniger habe, als der Nenner.

III)

III) Wenn der Zähler ~~weniger~~ mehr Dimensionen hat, als der Nenner, so kann man vermittelst der Division den Bruch in eine ganze und eine gebrochene Funkzion verwandeln. In der lezten wird der Zähler weniger Dimensionen haben, als der Nenner. Es sey dieser Bruch gegeben

$$\frac{3x^5 + x^3 - 4}{2x^2 + 15x}$$

Man dividire den Zähler durch den Nenner

$$(3x^5 + x^3 - 4) : (2x^2 + 15x) = \tfrac{3}{2}x^3 - \frac{45}{4}x^2 + \frac{679}{8}x - \frac{10185}{16} + \frac{\frac{152775}{16}x - 4}{2x^2 + 15x}$$

$$3x^5 + \frac{45}{2}x$$

$$\overline{-\frac{45}{2}x^4 + x^3 - 4}$$

$$-\frac{45}{2}x^4 - \frac{675}{4}x^3$$

$$\overline{+\frac{679}{4}x^3 - 4}$$

$$+\frac{679}{4}x^3 + \frac{10185}{8}x^2$$

$$\overline{-\frac{10185}{8}x^2 - 4}$$

$$-\frac{10185}{8} \quad - \frac{152775}{17}x$$

$$\overline{+\frac{152775}{16}x - 4}$$

Hier ist der Bruch verwandelt worden in eine ganze Funkzion vom dritten Grade, und in eine gebrochene, wo der Nenner eine Dimension mehr hat, als der Zähler. Will man beide nach der in der Formel angenommene Ordnung schreiben, so bekommen sie diese Gestalt.

$$-\frac{10185}{16} + \frac{679}{8}x - \frac{45}{4}x^2 + \tfrac{3}{2}x^3$$

$$+ \frac{-4 + \frac{152775}{16}x}{0 + 15x + 2x^2}$$

 §. 15.

§. 15.

Es ist oft nöthig, die Funkzionen zu verwandeln, das heißt, ihnen eine bequemere Gestalt zu geben. Meistens geschiehet die Verwandlung indem man aus der gegebenen Funkzion eine Summe mehrerer Funkzionen machet, oder sie gar in eine unendliche Reihe verwandelt. Zu diesem Zwecke leisten die **unbestimmten Koeffizienten** gute Dienste. Man giebt überhaupt in der Lehre von den Funkzionen und Gleichungen, allen beständigen und bekannten Grössen, den Namen Koeffizienten, wenn sie vor den unbestimmten oder unbekannten Größen als Faktoren stehen. Ob nun gleich alle Koeffizienten die durch Buchstaben ausgedrücket werden, unbestimmt sind, in so fern ihr Werth willkürlich ist; so nennet man doch insbesondere solche Koeffizienten unbestimmt, die noch eigentlich gar keinen Werth haben, sondern deren Werth erst aus anderen bekannten Koeffizienten bestimmet werden soll.

Dieses ist also zu verstehen. Wenn eine Funkzion eine andere Form bekommen soll, so nimmt man an, sie habe schon diese Form, und machet eine Gleichung, deren erstes Glied die gegebene Funkzion, und das andere die angenommene Funkzion ist. In dieser lezten sind die Koeffizienten noch unbekannt, werden aber unterdessen doch mit den ersten Buchstaben des Alphabets, als bekannte Grössen bezeichnet. Diese Buchstaben nun, wozu man meistens Kapital-Schrift gebrauchet, sind die **unbestimmten Koeffizienten**. Eine Gleichung, wo eine Funkzion einerseits bestimmte und andrerseits unbestimmte Koeffizienten hat, heißt eine **identische Gleichung**.

§. 16.

Aufgabe.

Eine razionale gebrochene Funkzion von x in einfache Brüche auflösen, deren Summe sie ist.

Auflösung. Man suche die Faktoren, woraus der Nenner entstehet (§. 13). Man mache so viel einzelne

Brüch

Brüche als Faktoren vorhanden sind. Diesen Brüchen gebe man die gefundenen Faktoren zu Nennern, und in den Zählern setze man unbestimmte Koeffizienten. Man mache eine Gleichung, wo die gegebene Funkzion das erste Glied ausmachet, und wo das zweite Glied die Summe der angenommenen Brüche ist. Man bringe alle Brüche unter einen Nenner. So bekömmt man beiderseits Zähler, die einander gleich seyn müssen. Man vergleiche die beiderseitigen Koeffizienten, die zur nemlichen Potenz von x gehören. So werden sich aus allen diesen Vergleichungen die unbestimmten Koeffizienten bestimmen laßen.

Exempel I. Es sey diese Funkzion gegeben

$$\frac{1+2x+3x^2}{-6-5x+2x^2+x^3}$$

Suchet man die Faktoren des Nenners, so bekömmt die Funkzion folgende Gestalt

$$\frac{1+2x+3x^2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

Nun nehme man an, es sey

$$\frac{1+2x+3x^2}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

Hier sind A, B und C unbestimmte Koeffizienten. Auch hat man den Zählern eine veränderliche Dimension weniger gegeben, als den Nennern. Denn die Zähler enthalten nur x^0, die Zähler aber x^1. Nun bringe man alles unter einen Nenner, so ist

$$\frac{1+2x+3x^2}{(x+1)(x-2)(x+3}=\frac{A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

Folglich, wenn man beiderseits mit dem Nenner multipliziret, ist

$$1+2x+3^2=A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2)$$

oder

oder, wenn man die Produkte entwickelt,

$$1+2x+3x^2=\left\{\begin{matrix}-6A\\+3B\\-2C\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}A\\+4B\\-C\end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}A\\+B\\+C\end{matrix}\right\}x^2$$

Soll nun diese Gleichung identisch seyn, so müssen die Koeffizienten beiderseits Satz für Satz mit einander übereinstimmen. Vergleichet man sie also mit einander, so entstehen folgende drei Gleichungen.

$$\begin{aligned}-6A+3B-2C&=1\\A+4B-\ \ C&=2\\A+\ \ B+\ \ C&=3\end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen suche man die Werthe der Größen A, B und C, wie im XIIten Hauptstücke §. 3 gelehret worden. Man findet

$$\begin{aligned}A&=-\tfrac{1}{3}\\B&=+\tfrac{17}{15}\\C&=+\tfrac{11}{5}\end{aligned}$$

Setzet man nun diese Werthe anstatt A, B und C in der erstlich angenommenen Gleichung, so bekömmt man

$$\frac{1+2x+3x^2}{-6-5x+2x^2+3x^3}=-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{17}{15(x-2)}+\frac{11}{5(x+3)}$$

Und also ist der gegebene Bruch in die Summe dreier einfachen Brüche verwandelt.

Exempel II. Es sey gegeben diese Funkzion:

$$\frac{1+x^3}{-x+3x^2-3x^3+x^4}$$

Hier siehet man sogleich, daß x ein Faktor vom Nenner ist. Dividiret man also durch x, so kömmt

$$-1+3x-3x^2+x^3$$

welche Funkzion sich nach §. 13 in

$$(x-1)(x-1)(x-1) \text{ oder } (x-1)^3$$

auf-

auflösen läßt. Also verwandelt sich erstlich die gegebene Funkzion in diese

$$\frac{1+x^3}{x(x-1)^3}$$

Laßt uns nun annehmen

$$\frac{1+x^3}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B+Cx+Dx^2}{(x-1)^3}$$

Hier nehmen wir im lezten Zähler zwei Dimensionen an, weil der Nenner deren drei hat. Wird alles unter einen Nenner gebracht, so entstehet

$$\frac{1+x^3}{x(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^3+Bx+Cx^2+Dx^3}{x(x-1)^3}$$

Wird beiderseits mit dem Nenner multipliziret, so wird

$$1+x^3=A(x-1)^3+Bx+Cx^2+Dx^3.$$

Wird die Erhöhung entwickelt, und werden linker Hand die mangelnden Säze ausgefüllet, so bekömmt man

$$1+0.x+0.x^2+1.x^3=A+\left\{\begin{matrix}3A\\+B\end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}-3A\\+C\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}+A\\+D\end{matrix}\right\}x^3$$

Dieses giebt vier Gleichungen

$$\begin{aligned}A&=1\\3A+B&=0\\-3A+C&=0\\A+D&=1\end{aligned}$$

Hieraus ziehet man

$$\begin{aligned}A&=1\\B&=-3\\C&=+3\\D&=0\end{aligned}$$

Wenn man diese Werthe in die angenommene Gleichungen sezet, so wird

$$\frac{1+x^3}{-x+3x^2-3x^3+x^4}=\frac{1}{x}+\frac{-3+3x}{(x-1)^3}$$

Weil

Weil der lezte Bruch noch zusammengesetzet ist, so kann man ihn wiederum folgendermaßen aus einander setzen. Man nehme an, es sey

$$\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{A'}{(x-1)^3} + \frac{B'}{(x-1)^2} + \frac{C'}{x-1}$$

Wird alles unter einen Nenner gebracht, so hat man

$$\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{A'}{(x-1)^3} + \frac{B'(x-1)}{(x-1)^3} + \frac{C'(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

Folglich

$$-3+3x = A' + B'(x-1) + C'(x-1)^2$$

oder wenn man alles gehörig entwickelt

$$\begin{aligned} -3+3x = {} & A' \\ & -B' + B'x \\ & + C' - 2C'x + C'x^2 \end{aligned}$$

Woraus diese drei Gleichungen entstehen

$$\begin{aligned} A' - B' + C' &= -3 \\ B' - 2C' &= +3 \\ C' &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus kommen folgende Werthe

$$\begin{aligned} &= 0 \\ B' &= +3 \\ A' &= 0 \end{aligned}$$

Setzet man diese Werthe in der angenommenen Gleichung, so wird

$$\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{0}{(x-1)^3} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{0}{x-1}$$

oder kürzer

$$\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2}$$

Wird nun dieser Werth wiederum in der erst gefundenen Auflösung gesetzet, so ist

$1+x^3$

$$\frac{1+x^3}{-x+3x^2-3x^3+x^4}=\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}$$

Exempel III. Es sey gegeben diese Funkzion

$$\frac{7x}{x^3-5x^2+12x-60}$$

Der Nenner verschwindet, wenn man annimmt $x=5$ oder $x-5=0$. Also ist $x-5$ einer von den Faktoren. Dividiret man den Nenner durch $x-5$, so kömmt x^2+12. Man löse nun diese Gleichung auf

$$x^2+12=0$$

so findet man

$$x=\pm 2\sqrt{-3}$$

oder $x\mp 2\sqrt{-3}=0$.

Die drei Faktoren sind also

$$x-5$$
$$x-2\sqrt{-3}$$
$$x+2\sqrt{-3}$$

Jedesmal wenn zwei imaginäre Faktoren vorkommen, darf man nur ihr Produkt als Faktor annehmen, also x^2+12 anstatt $x-2\sqrt{-3}$ und $x+2\sqrt{-3}$. Folglich wird die gegebene Funkzion

$$\frac{7x}{(x-5)(x^2+12)}$$

Man nehme an, es sey

$$\frac{7x}{(x-5)(x^2+12)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B+Cx}{x^2+12}$$

Wenn alles unter einen Nenner gebracht wird, so entstehet

$$\frac{7x}{(x-5)(x^2+12)}=\frac{A(x^2+12)+B(x-5)+Cx(x-5)}{(x-5)(x^2+12)}$$

Und

Und wenn beiderseits mit dem Nenner multipliziret wird

$$7x = A(x^2+12) + B(x-5) + Cx(x-5)$$

Und wenn alles gehörig entwickelt wird,

$$\begin{array}{rl} 0+7x+0x^2 = 12A \ldots\ldots & +Ax^2 \\ -5B+Bx & \\ -5Cx & +Cx^2 \end{array}$$

Dieses giebt folgende drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 12A - 5B &= 0 \\ B - 5C &= 7 \\ A + C &= 0 \end{aligned}$$

Daraus entstehet

$$\begin{aligned} A &= +\tfrac{35}{37} \\ B &= +\tfrac{84}{37} \\ C &= -\tfrac{35}{37} \end{aligned}$$

Werden nun diese Werthe anstatt der unbestimmten Koeffizienten gesetzet, so kömt:

$$\frac{7x}{x^3-5x^2+12x-60} = \frac{35}{37(x-5)} + \frac{84-35x}{37(x^2+12)}$$

§. 17.

Aufgabe.

Eine gebrochene Funkzion von x in eine unendliche Reihe verwandeln.

Auflösung. Man nehme an, daß die Funkzion einer unendlichen Reihe von dieser Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

gleich sey. Die Gleichung, welche aus dieser Voraussetzung entspringet, wird Mittel an die Hand geben, um die unbestimmten Koeffizienten zu bestimmen.

Exempel I. Es sey gegeben,

$$\frac{4x}{3+2x+5x^2}$$

so

so nehme man an, es sey

$$\frac{4x}{3+2x+5x^2} = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \&c.$$

Wir nehmen hier in der unendlichen Reihe keinen bloß bekannten Satz an, weil im Zähler keiner vorhanden ist. Man multiplizire beiderseits durch den Nenner, so wird

$$\begin{aligned} 4x = 3Ax + 3Bx^2 + 3Cx^3 + 3Dx^4 + 3Ex^5 + \&c. \\ + 2Ax^2 + 2Bx^3 + 2Cx^4 + 2Dx^5 + \&c. \\ + 5Ax^3 + 5Bx^4 + 5Cx^5 + \&c. \end{aligned}$$

Hieraus entstehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3A &= 4 \\ 3B + 2A &= 0 \\ 3C + 2B + 5A &= 0 \\ 3D + 2C + 5B &= 0 \\ 3E + 2D + 5C &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus bekömt man

$$\begin{aligned} A &= + \tfrac{4}{3} \\ B &= - \tfrac{8}{9} \\ C &= - \tfrac{44}{27} \\ D &= + \tfrac{208}{81} \\ E &= + \tfrac{244}{243} \end{aligned}$$

Setzet man diese Werthe an der Stelle der unbestimmten Koeffizienten in der angenommenen Gleichung, so bekömt man

$$\frac{4x}{3+2x+5x^2} = \tfrac{4}{3}x - \tfrac{8}{9}x^2 - \tfrac{44}{27}x^3 + \tfrac{208}{81}x^4 + \tfrac{244}{243}x^5 + \&c.$$

Exempel II. Man soll $\sqrt{(1-x^2)}$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Man setze

$$\sqrt{(1-x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.$$

Wir lassen hier die unpaaren Potenzen aus, weil man voraussehen kann, daß man sie nicht nöthig hat. Man quadrire beide Glieder, indem man die unendliche Reihe durch sich selbst multipliziret.

$$\sqrt{(1-x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.$$
$$\times\sqrt{(1-x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.$$

$$\begin{aligned} 1-x^2 = & A^2 + ABx^2 + ACx^4 + ADx^6 + AEx^8 + \&c. \\ & + ABx^2 + B^2x^4 + BCx^6 + BDx^8 + \&c. \\ & + ACx^4 + BCx^6 + CCx^8 + \&c. \\ & ADx^6 + BDx^8 + \&c. \\ & + AEx^8 + \&c. \end{aligned}$$

$$1-x^2 = A^2 + 2ABx^2 + \binom{2AC}{+B^2}x^4 + \binom{2AD}{+2BC}x^6 + \left(\begin{matrix}2AE\\2BD\\CC\end{matrix}\right)x^8 + \&c.$$

Es muß also seyn:

$$\begin{aligned} A^2 &= 1 \\ 2\,AB &= -1 \\ 2\,AC + B^2 &= 0 \\ 2\,AD + 2BC &= 0 \\ 2\,AE + 2BD + CC &= 0 \\ \&c.\ \&c. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen bekömt man

$$\begin{aligned} A &= +\ 1 \\ B &= -\ \tfrac{1}{2} \\ C &= -\ \tfrac{1}{8} \\ D &= -\ \tfrac{1}{16} \\ E &= -\ \tfrac{5}{128} \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Folglich wird

$$\sqrt{(1-x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \&c.$$

Exempel III. Man soll die Funkzion $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ in eine unendliche Reihe verwandeln. Es sey

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \&c.$$

Man mache beiderseits das Quadrat, so wird

$$\frac{1}{1-x^2} = A^2 + 2ABx^2 + 2ACx^4 + 2ADx^6 + \&c.$$
$$\qquad\qquad + B^2x^4 + 2BCx^6$$

Mul-

Multipliziret man beiderseits mit $1-x^2$, so kömt

$$\begin{aligned} 1 = A^2 &+ 2ABx^2 + 2ACx^4 + 2ADx^6 + \&c. \\ &+ B^2x^4 + 2BCx^6 + \&c. \\ &- A^2x^2 - 2ABx^4 - 2ACx^6 - \&c. \\ &- B^2x^6 - \&c. \end{aligned}$$

Hieraus entstehen nun folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} A^2 &= 1 \\ 2AB - A^2 &= 0 \\ 2AC + B^2 - 2AB &= 0 \\ 2AD + 2BC - 2AC - B^2 &= 0 \\ \&c.\ \&c. \end{aligned}$$

Diese geben folgende Werthe:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \tfrac{1}{2} \\ C &= \tfrac{3}{8} \\ D &= \tfrac{5}{16}\ \&c.\ \&c. \end{aligned}$$

Es ist folglich

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + \&c.$$

Exempel IV. Der Bruch $\frac{a}{a-x}$ soll in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Es sey

$$\frac{a}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

Man multiplizire beiderseits mit $a-x$

$$\begin{aligned} a = aA &+ aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \&c. \\ &- Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 - \&c. \end{aligned}$$

Folglich wird

$$\begin{aligned} aA &= a \\ aB - A &= 0 \\ aC - B &= 0 \\ aD - C &= 0 \\ aE - D &= 0 \\ \&c.\ \&c. \end{aligned}$$

Hieraus bekömt man

$$A = 1$$
$$B = \frac{1}{a}$$
$$C = \frac{1}{a^2}$$
$$D = \frac{1}{a^3}$$
$$E = \frac{1}{a^4}$$

&c. &c.

Setzet man diese Werthe in der angenommenen Gleichung, so bekömt man

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{1}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{a^3}x^3 + \frac{1}{a^4}x^4 + \&c.$$

oder $\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} + \&c.$

Wenn man hier b anstatt x schreibet, so ist dieses die nemliche Reihe, welche im IVten Hauptstücke §. 29 durch die Division erhalten worden.

§. 18.

Eine veränderliche Größe in einer Funkzion stellet alle mögliche Größen ihrer Art vor. Z. E. wenn in dem Bruche $\frac{a}{y}$, der Nenner y als veränderlich angesehen wird, so kann man ihn vergrößern oder verkleinern, soviel man will. Folglich stellet hier y alle mögliche Divisoren der Größe a vor. In der Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

stellen $x, x^2, x^3, x^4 + \&c.$, die Potenzen aller möglichen unbekannter Größen vor, u. s. f.

§. 19.

§. 19.

Wenn eine Größe einer Funkzion gleich ist, so saget man, der Kürze halben, sie sey die Funkzion selbst. Z. E. Wenn $z = xy$, so saget man, z ist eine Funkzion von x und y.

§. 20.

Wenn eine Größe z eine Funkzion anderer Größen ist, so wird vorausgesetzet, daß man die Größe z nicht verändern kann, wie man will, sondern daß die Veränderung des z immer von den Veränderungen der Größen, die in der Funkzion sind, abhänge; auf daß die Gleichung bei jeder Veränderung Statt finde. Z. E. Es sey $z = axy$, so verstehet es sich, daß z dem Produkte axy nicht nur bei einem bestimmten Werthe von x und y, sondern bei allen möglichen Werthen dieser Faktoren gleich bleiben soll. Ob also gleich die Veränderungen des x und y hier willkührlich sind, so ist doch die Veränderung des z nicht willkührlich, sondern sie hänget gänzlich von den Werthen ab, welche die Größen x und y bekommen.

§. 21.

Jede Funkzion einer veränderlichen Größe ist selbst eine veränderliche Größe; weil sie den Veränderungen der in der Funkzion enthaltenen Größen folgen muß. Wenn also $z = axy$, wo x und y veränderlich sind, so ist z auch veränderlich.

§. 22.

Es ist am gehörigen Orte (VIII Hauptst. §. 2.) gesaget worden, daß ein Verhältniß nichts anders ist, als die Art, wie eine Größe aus anderen entstehet. Eine Größe entstehet aber aus anderen, wenn diese zusammen addiret, oder von einander subtrahiret, oder mit einander multipliziret, oder eine durch die andere dividiret, oder eine zur anderen erhoben, oder eine durch die andere exponenziret, werden.

 Das

Das Verhältniß einer Größe gegen andere Größen kann also jedesmal durch eine Funkzion dieser anderen Größen ausgedrücket werden. Z. E. $a = \left(\frac{b}{c}\right)^n$ drücket das Verhältniß des a gegen b, c und n aus, und zeiget an, daß a aus b, c und n entstehet, wenn b durch c dividiret, und der Quozient zu n erhoben wird.

§. 23.

In einer Gleichung kann jede Größe durch eine Funkzion aller anderen ausgedrücket werden. Denn es kann jede Größe allein auf eine Seite gebracht werden, und so erhält man auf der anderen Seite eine Funkzion aller anderen Größen, wodurch der Werth der einen ausgedrücket wird. Z. E. Es sey

$$a + bc = dc - m^n$$

so ist $a = (d - b)c - m^n$

$$b = d - \frac{m^n + a}{c}$$

$$c = \frac{dc - m^n - a}{b}$$

$$m = \sqrt[n]{(dc - bc - a)}$$

Also ist in einer Gleichung das Verhältniß jeder Größe gegen alle übrigen enthalten, oder eine Gleichung drücket die Verhältnisse aller Größen aus, die in den Sätzen oder Gliedern enthalten sind.

§. 24.

Eine Gleichung bestehet aus lauter Funkzionen. Jede Seite der Gleichung machet zusammen eine Funkzion aus. Jede dieser beiden Funkzionen kann wiederum aus Funkzionen bestehen.

Da aber in jeder Funkzion die Größen verändert werden können, so können auch die Größen in einer Gleichung verändert werden.

§. 25.

Wenn einige Größen in einer Gleichung als veränderlich betrachtet werden, so wird vorausgesetzet, daß bei allen ihren Veränderungen die Gleichung wahr bleibe, oder daß die nemlichen Verhältnisse der Größen immer Statt finden, wie schon §. 20 angemerket worden.

§. 26.

Weil nun das nemliche bei allen unbestimmten Gleichungen Statt findet (XII. Hauptst. §. 5), so können auch alle Gleichungen zwischen veränderlichen Größen als unbestimmte Gleichungen, und umgekehrt, alle unbekannte Größen in einer unbestimmten Aufgabe, als veränderliche Größen betrachtet werden. In solchen unbestimmten Aufgaben wird also weiter nichts gesuchet, als das Verhältniß, welches jede der unbekannten Größen gegen die übrigen haben soll. Und da jede unbekannte Größe eine Funkzion aller anderen ist, so wird sie bestimmt, so bald die übrigen bestimmet werden.

§. 27.

Aufgabe.

Wenn eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist, den Werth der einen veränderlichen oder unbekannten Größe x durch eine unendliche Funkzion von y ausdrücken.

Auflösung. Man setze x sey gleich einer unendlichen Reihe, die nach den Potenzen von y geordnet ist, und deren Koeffizienten man anfänglich unbestimmt läßt. Diese Reihe und ihre Potenzen setze man in der Gleichung. Wenn dieses geschehen, so hat man eine identische Gleichung, und es bleibet nichts mehr zu thun, als daß man die beiderseitigen Koeffizienten vergleiche.

Exempel I. Es sey

$ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \&c. = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4$ &c. wo unter $a, b, c, d,$ &c. und $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ &c.

lauter

lauter bekannte und unveränderliche Koeffizienten verstanden werden. Man nehme an, es sey

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$$

So wird

$$\begin{aligned} x^2 &= A^2y^2 + 2ABy^3 + 2ACy^4 + \&c. \\ &\qquad\qquad\qquad + B^2y^4 + \&c. \\ x^3 &= \ldots\ldots\ A^3y^3 + 3A^2By^4 + \&c. \\ x^4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ A^4y^4 + \&c. \end{aligned}$$

Wenn man diese Werthe von x, x^2, x^3, x^4, &c., in der gegebenen Gleichung setzet, so bekömmt man

$$\begin{aligned} ay + by^2 + ay^3 + dy^4\ \&c. = A\alpha y &+ B\alpha y^2 + C\alpha y^3 + D\alpha y^4 + \&c. \\ &+ A^2\beta y^2 + 2AB\beta y^3 + 2AC\beta y^4 + \&c. \\ &+ B^2\beta y^4 + \&c. \\ &+ A^3\gamma y^3 + 3A^2B\gamma y^4 + \&c. \\ &+ A^4\delta y^4 + \&c. \end{aligned}$$

Weil diese Gleichung identisch seyn soll, so muß seyn

$$\begin{aligned} &A\alpha = a \\ &B\alpha + A^2\beta = b \\ &C\alpha + 2AB\beta + A^3\gamma = c \\ &D\alpha + 2AC\beta + B^2\beta + 3A^2B\gamma + A^4\delta = d \\ &\qquad \&c.\ \&c. \end{aligned}$$

Daraus ziehet man

$$A = \frac{a}{\alpha}$$

$$B = \frac{b - A^2\beta}{\alpha}$$

$$C = \frac{c - 2AB\beta - A^3\gamma}{\alpha}$$

$$D = \frac{d - 2AC\beta - B^2\beta - 3A^2B\gamma - A^4\delta}{\alpha}$$

&c. &c.

Da man a, b, c, d, &c. und α, β, γ, δ, &c. kennet, so wird es leicht seyn, in jedem Falle A, B, C, D, &c. zu bestimmen.

Exem-

Exempel II. Es sey

$$y = \alpha x + \beta y^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \&c.$$

Es soll x durch eine unendliche Reihe ausgedrücket werden, worin alle Sätze Funkzionen von x seyen. Man könnte hier die nemliche Operazion vornehmen, als bey vorigem Exempel. Aber, der Kürze halben, kann man beobachten, daß dieses Exempel im Grunde mit dem vorhergehenden übereinstimmet, wenn man nur in der leztgefundenen Formel setzet

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \\ \&c. &\ \&c. \end{aligned}$$

Alsdenn bekömmt man aus gedachter Formel

$$A = \frac{1}{\alpha}$$

$$B = \frac{-A^2\beta}{\alpha}$$

$$C = \frac{-2AB\beta - A^3\gamma}{\alpha}$$

$$D = \frac{-2AC\beta - B^2\beta - 3A^2B\gamma - A^4\delta}{\alpha}$$

&c. &c.

Exempel III. Es sey gegeben diese Gleichung

$$my^3 - x^3y - mx^3 = 0$$

Man nehme an, es sey

$$y = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+\mu} + Cx^{\lambda+2\mu} + Dx^{\lambda+3\mu} + \&c.$$

Man setze in der gegebenen Gleichung diese Reihe und ihre Potenzen, anstatt y und dessen Potenzen, so bekömmt man

$$\left.\begin{array}{l} mA^3x^{3\lambda} + 3mA^2Bx^{3\lambda+\mu} + 3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu} + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 3mAB^2x^{3\lambda+2\mu} + \&c. \\ -mx^3 - Ax^{\lambda+3} \quad - Bx^{\lambda+\mu+3} \quad - \&c. \end{array}\right\} = 0$$

 Wenn

Wenn diese Gleichung wahr und identisch seyn soll, so müssen die Exponenten und Koeffizienten, welche negativ sind, diejenigen, welche positiv sind, aufheben oder vernichten. Für die Exponenten bekömmt man also folgende Gleichungen

$$3\lambda = 3$$
$$3\lambda + \mu = \lambda + 3$$

Daraus bekömmt man nun

$$\lambda = 1$$
und $$\mu = 1$$

Für die Koeffizienten bekömmt man folgende Gleichungen

$$mA^3 = m$$
$$3mA^2B = A$$
$$3mA^2C + 3mAB^2 = B.$$

Dieses giebt folgende Werthe für A, B und C

$$A = 1$$
$$B = \frac{1}{3m}$$
$$C = 0$$

Wenn man die unendliche Reihe weiter entwickelt, so bekömmt man noch

$$D = -\frac{1}{81m^3}$$
$$E = \frac{1}{243m^4}$$
&c. &c.

Folglich wird

$$y = x + \frac{1}{3m}x^2 * - \frac{1}{81m^3}x^4 + \frac{1}{243m^4}x^5 + \&c.$$

Dieses ist also ein Werth von y. Um die übrigen zu finden, bemerke man, daß die identische Gleichung auch folgendermaßen geordnet werden kann:

$-mx^3$

$$\left.\begin{array}{l}-mx^3+mA^3x^{3\lambda}+3mA^2Bx^{3\lambda+\mu}+3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu}+\&c.\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +3mAB^2x^{3\lambda+2\mu}+\&c.\\ -Ax^{\lambda+3}-Bx^{\lambda+\mu+3}-Cx^{\lambda+2\mu+3}-Dx^{\lambda+3\mu+3}+\&c.\end{array}\right\}=0$$

Welches erfordert, daß in den Exponenten sey

$$3 = \lambda + 3$$

und $3\lambda = \lambda + \mu + 3$

Daher $\lambda = 0$

und $\mu = -3$

Was die Koeffizienten betrift, so muß seyn

$-m = A$ oder $-m - A = 0$

$mA^3 = B$

$3mA^2 B = C$

&c. &c.

Folglich wird

$A = -m$

$B = -m^4$

$C = -3m^7$

Auf ähnlicher Art kann man finden

$D = -12m^{10}$

$E = -55m^{13}$

&c. &c.

Es wird also

$$y = -m - m^4x^{-3} - 3m^7x^{-6} - 12m^{10}x^{-9} - 55m^{13}x^{-12} - \&c.\ \&c.$$

Hier folget eine dritte Art, wie man die Koeffizienten vergleichen kann.

$$\left.\begin{array}{l}mA^3x^{3\lambda}+3mA^2Bx^{3\lambda+\mu}+3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu}+\&c.\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +3mAB^2x^{3\lambda+2\mu}+\&c.\\ -Ax^{\lambda+3}-Bx^{\lambda+\mu+3}\quad -Cx^{\mu+2\mu+3}+\&c.\\ \cdot\ \cdot\ -mx^3\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \&c.\end{array}\right\}=0$$

Hier-

Hieraus ziehet man für die Exponenten

$$3\lambda = \lambda + 3$$
$$3\lambda + \mu = \lambda + \mu + 3 = 3$$

Deswegen ist

$$\lambda = \tfrac{3}{2}$$
$$\mu = -\tfrac{3}{2}$$

Für die Koeffizienten hat man folgende Gleichungen

$$mA^3 = A$$
$$3mA^2B = B + m$$
$$3mA^2C + 3mAB^2 = C$$

&c. &c.

Hieraus erhält man

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$$
$$B = \tfrac{1}{2}m$$
$$C = \pm \frac{3m^3}{8\sqrt{m}}$$

und wenn man weiter rechnet

$$D = \frac{m^4}{2}$$
$$E = \pm \frac{51m^6}{128\sqrt{m}}$$

&c. &c.

Es ist also

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}m \pm \frac{3m^3}{8\sqrt{m}} x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}m^4 x^{-3} \pm \text{\&c.}$$

Weil diese Reihe zweideutige Zeichen hat, so stellet sie zugleich zwei Werthe von y vor. Man hat also 4 verschiedene Werthe für y gefunden, wie es auch seyn muß, da die

die Gleichung vier unbestimmte Dimensionen hat. Es ist nemlich

I) $y = x + \frac{1}{3m}x^2 - \frac{1}{81m^3}x^4 + \frac{1}{243m^4}x^5 + \&c.$

II) $y = -m - m^4x^{-3} - 3m^7x^{-6} - 12m^{10}x^{-9} - 55m^{13}x^{-12}$
$- \&c.$

III) $y = \frac{1}{\sqrt{m}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}m + \frac{3m^3}{8\sqrt{m}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}m^4x^{-3} + \&c.$

IV) $y = -\frac{1}{\sqrt{m}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}m - \frac{3m^3}{8\sqrt{m}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}m^4x^{-3} - \&c.$

Anmerkung. Dieses lezte Exempel ist von Herrn Cousin entlehnet (Leçons de Calcul. &c. §. 35). Und ob es gleich mit den beiden vorhergehenden nicht ganz nach einerley Methode berechnet wird, so hat es doch viel Aehnlichkeit mit denselben, und gehöret wenigstens zur selbigen allgemeinen Aufgabe.

Vierzehntes Hauptstück.

Von den Differenzen der Funkzionen.

§. 1.

Wenn man sich die Veränderung einer Funkzion deutlich vorstellen will, so muß man wissen, was sowohl die erst gegebenen Größen als die zugesezten oder abgenommenen Größen dazu beitragen. Um sich hierinn nicht zu verwickeln, pfleget man folgendermaßen zu verfahren. Wenn man anzeigen will, daß eine Größe x um irgend einen Theil zunehmen oder abnehmen soll, so bezeichnet man dasjenige was zugesetzet oder abgenommen werden soll, mit demselbigen Buchstaben x, nebst dem Zeichen Δ (Delta) davor. Also heißt $x + \Delta x$ so viel, als daß x um eine Größe die mit Δx bezeichnet ist, abnehmen oder zunehmen soll.

Gesetzet, ich will wissen, um wie viel ein Produkt zunimmt, wenn beide Faktoren größer werden. Da hier beide Faktoren verändert werden, so schreibe ich erstlich xy (XII. Hauptst. §. 4). Wenn nun x um Δx, und y um Δy zunehmen, so bekömmt man $(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x . \Delta y$. Folglich nimmt das Produkt zu, um $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x . \Delta y$. Das heißt, die Vergrößerung des Produktes bestehet 1) aus dem zweiten Faktor mit der Zunahme des ersten multipliziret, 2) aus dem ersten Faktor mit der Zunahme des zweiten multipliziret, 3) aus dem Produkte beider Zunahmen.

§. 2.

Wenn eine Funkzion veränderliche Größen enthält, so ist sie selbst veränderlich, (XIII. Hauptst. §. 21) und ihre Zunahme oder Abnahme kann eben so wie die Zunahme oder

oder Abnahme einzelner Größen angedeutet werden. (§. 1). Also heißt $\Delta(xy)$ eben so viel, als die Zunahme von xy, wenn x und y größer werden. Aus dem Exempel in §. 1. siehet man, daß $\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x . \Delta y$.

§. 3.

Die Differenz einer veränderlichen Größe ist diejenige Größe, welche zur veränderlichen zugesetzet, oder von derselben abgenommen wird. Wenn ich im Produkte xy, sowohl x als y vergrößere, so entstehet $(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y$. Hier ist Δx die Differenz der Größe x, Δy ist die Differenz der Größe y. Und $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y$, ist die Differenz der Funkzion xy. Diese lezte Differenz entstehet aus den vorigen, und ist eine Funkzion von x, y, Δx und Δy.

§. 4.

Aufgabe.

Die Differenz einer Funkzion finden, nachdem man bestimmet hat, welche Größen verändert werden sollen, und welche beständig oder unverändert bleiben sollen.

Auflösung. Man schreibe anstatt der veränderlichen Größen, dieselbigen veränderlichen Größen mit ihren Differenzen: von der veränderten Funkzion die alsdann entstehet, subtrahire man die gegebene Funkzion: so bekömmt man die Differenz der gegebenen Funkzion.

Exempel I. Es sey verlanget $\Delta(x \pm y)$. Wenn man anstatt x, $x + \Delta x$, und anstatt y, $y + \Delta y$ schreibet, so entstehet

$$(x + \Delta x) \pm (y + \Delta y)$$

oder $x + \Delta x \pm y \pm \Delta y$

subtr. $x \ldots \ldots \pm y$

bleibet $+\Delta x \ldots \pm \Delta y = \Delta(x \pm y)$

Exem-

Exempel II. Es sey verlanget $\Delta(xy)$. Schreibet man $x+\Delta x$ anstatt x, und $y+\Delta y$, anstatt y, so bekömmt man

$$(x+\Delta x)\,(y+\Delta y)$$

oder $xy+y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$

subtr. xy

bleibet . . . $y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y=\Delta(xy)$.

Exempel III. Man verlanget $\Delta\left(\frac{x}{y}\right)$. Wenn man $x+\Delta x$ anstatt x, und $y+\Delta y$ anstatt y schreibet, so bekömmt man

$$\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}$$

subtr. $\frac{x}{y}$

bleibet $\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y}$

oder wenn man beide Brüche unter einen Nenner bringet, und die Zähler subtrahiret

$$\frac{y\Delta x-x\Delta y}{yy+y\Delta y}=\Delta\left(\frac{x}{y}\right)$$

Exempel IV. Es werde verlanget $\Delta(x^n)$, setzet man $x+\Delta x$ anstatt x, so kömmt

$$(x+\Delta x)^n$$

oder $x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1.\,2}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^{n-3}\Delta x^3+$ &c.

subtr. x^n

bleibet $nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1.\,2}x^{n-2}\Delta x^2+$ &c. $=\Delta(x^n)$

Zusatz I. Wir haben bei diesen Exempeln angenommen, daß die Größen in der Funkzion allemal zunehmen. Sollten

Sollten aber einige Größen abnehmen, so würden ihre Differenzen das Zeichen — bekommen, und das Verfahren würde übrigens das nemliche seyn. Z. E. In der Funkzion xy sollen x und y abnehmen, so verwandelt sich diese Funkzion in

$$(x-\Delta x)(y-\Delta y)$$

oder $xy - y\Delta x - x\Delta y + \Delta x\Delta y$

subtr. xy

bleibet $-y\Delta x - x\Delta y + \Delta x\Delta y = \Delta(xy)$

Man kann auch anfänglich die Differenzen als positiv annehmen. Darauf muß man aber in der Differenz der Funkzion diejenigen Säße beobachten, worinn die negativen Faktoren in unpaarer Anzahl oder unpaarer Potenz vorkommen. Bei solchen Säßen müssen die Zeichen + und — verwechselt werden. Z. E. wenn x und y zunehmen, so ist $\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$. Soll Δx negativ seyn, so wird $\Delta(xy) = -y\Delta x + x\Delta y - \Delta x\Delta y$. Sollen Δx und Δy beide negativ seyn, so wird $\Delta(xy) = -y\Delta x - x\Delta y + \Delta x\Delta y$. Soll im IVten Exempel x abnehmen, so wird $\Delta(x^n) = -nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$ Uebrigens wird die Differenz der ganzen Funkzion allemal als positiv angesehen. Die Rechnung muß ausweisen, ob sie wirklich positiv ist, oder negativ.

Zusaß II. Wenn man sich die in den Exempeln gefundenen Formeln merket, so kann man in einer Funkzion die Differenz eines jeden Saßes suchen, ohne die Subtrakzion zu verrichten. Es sey verlanget die Differenz von $xy + \frac{x}{z} - y^2$, so bekömmt man

$$\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

$$\Delta\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{z\Delta x - x\Delta z}{zz + z\Delta z}$$

$$\Delta(y^2) = 2y\Delta y + \Delta y^2$$

und $-\Delta(y^4) = -2y\Delta y - \Delta y^2$

Nimmt man diese einzelne Differenzen zusammen, wie aus dem ersten Exempel erhellet, so bekömmt man

$$\Delta\left(xy + \frac{x}{z} - y^2\right) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$
$$+ \frac{z\Delta x - x\Delta z}{zz + z\Delta z} - 2y\Delta y - \Delta y^2$$

Zusatz III. Beständige Größen haben keine Differenz. Will man sie aber als veränderliche Größen behandeln, so kann man ihnen keine andere Differenz als o zuschreiben. Z. E. Man wollte die Formel $\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yy + y\Delta y}$ gebrauchen um $\Delta\left(\frac{a}{y}\right)$ zu finden, so bekäme man $\frac{y\Delta a - a\Delta y}{yy + y\Delta y}$

oder weil $\Delta a = o$

$$\frac{-a\Delta y}{yy + y\Delta y}$$

Sonst könnte man die Subtrakzion zur Hülfe nehmen. So bekäme man erstlich anstatt $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{y + \Delta y}$.

Von $\frac{a}{y + \Delta y}$

subtr. $\frac{a}{y}$

bleibet $\frac{a}{y + \Delta y} - \frac{a}{y} = \frac{-a\Delta y}{yy + y\Delta y}$

§. 5.

§. 5.

Wenn in einer Gleichung veränderliche Größen angenommen werden, so wird dabei vorausgesetzet, daß die Gleichheit bei allen Veränderungen Statt finde (XIII. Hauptst. §. 25).

Soll aber dieses seyn, so können die Veränderungen der Größen oder ihre Differenzen unmöglich alle willkürlich seyn, sondern sie müssen auch gewisse Verhältnisse gegen einander haben. Denn jede Größe in der Gleichung ist eine Funkzion aller anderen. Also muß die Differenz jeder Größe ein gewisses Verhältniß gegen die Differenzen aller anderen haben. Folglich müssen alle Differenzen in einem gewissen Verhältnisse stehen.

Die Gleichung nun, welche die Verhältnisse der Differenzen in einer Gleichung ausdrückt, heißt die **Differenzialgleichung.**

§. 6.

Aufgabe.

Wenn eine Gleichung gegeben ist, worinn veränderliche Größen enthalten sind, die dazu gehörige Differenzialgleichung finden.

Auflösung. Man setze bei jeder veränderlichen Größe der Gleichung ihre Differenz, zwischen die so veränderten Sätze der Gleichung setze man wiederum das Gleichungszeichen, weil die Gleichheit bei allen Veränderungen bleiben soll. Von dieser neuen Gleichung subtrahire man die gegebene, nemlich das erste Glied von dem ersten, und das zweite von dem zweiten. Zwischen beiden Resten oder Differenzen setze man abermals das Gleichungszeichen, so erhält man die verlangte Differenzialgleichung.

Exempel.

Es sey $ax + by = \frac{x}{c} + 3z$

so muß seyn $a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) = \frac{x + \Delta x}{c} + 3(z + \Delta z)$

oder $ax + a\Delta x + by + b\Delta y = \frac{x}{c} + \frac{\Delta x}{c} + 3z + 3\Delta z$

subtr. $ax \ldots + by \ldots = \frac{x}{c} \ldots + 3z$

bleibet $a\Delta x \ldots + b\Delta y = \ldots \frac{\Delta x}{c} \ldots + 3\Delta z$

oder wenn man beiderseits mit c multipliziret

$$ac\Delta x + bc\Delta y = \Delta x + 3c\Delta z$$

oder $(ac - 1)\,\Delta x + bc\Delta y = 3c\Delta z$

Hieraus erhält man

$$\Delta x = \frac{3c\Delta z - bc\Delta y}{ac - 1}$$

$$\Delta y = \frac{3c\Delta z - (ac - 1)\Delta x}{bc}$$

$$\Delta z = \frac{(ac - 1)\Delta x + bc\Delta y}{3c}$$

Also ist das Verhältniß jeder Differenz gegen die anderen Differenzen und die gegebenen Größen bestimmt.

Zusatz. Weil hier jeder Satz um seine Differenz vergrößert wird, und hernach der Satz selbst abgezogen wird, so ist dies Verfahren das nemliche, als wenn man die Differenz jedes Satzes insbesondere genommen hätte. Folglich kann man auch auf dieser Art die Differenzialgleichung finden. Weil also gegeben ist

$$ax + by = \frac{x}{c} + 3z$$

so

so ist
$$\Delta(ax) = a\Delta x$$
$$\Delta(by) = b\Delta y$$
$$\Delta\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{\Delta x}{c}$$
$$\Delta(3z) = 3\Delta z$$

folglich wird die Differenzialgleichung

$$a\Delta x + b\Delta y = \frac{\Delta x}{c} + 3\Delta z$$

eben so wie vorher.

§. 7.

Weil jede Differenz eine Funkzion aller übrigen ist, so wird jede Differenz bestimmet, wenn alle übrigen bestimmet werden. Wenn man also den Differenzen einen bestimmten Werth, z. E. in Zahlen geben will, so muß man nothwendig eine Differenz unbestimmt laßen. Sie wird aus der Differenzialgleichung durch die übrigen bestimmet werden.

§. 8.

Wenn man die Differenz einer Funkzion gefunden hat, so kann man wiederum die Differenz dieser Differenz suchen. Dieses ist also zu verstehen. Eine Größe hat um Δx zugenommen. Nun nimmt sie wieder zu. Aber man stellet sich vor, daß die zweite Zunahme der ersten nicht gleich, sondern etwas größer oder kleiner ist. Beide Differenzen haben also einen Unterschied oder wiederum eine Differenz. Diese Differenz der Differenzen wird ausgedrücket durch $\Delta\Delta$ oder Δ^2. Wenn also die Größe x das erste mal um Δx zugenommen hat, so nimmt sie das zweite mal noch zu, um $\Delta x + \Delta^2 x$, und wird $x + 2\Delta x + \Delta^2 x$. Dieses $\Delta\Delta x$ oder $\Delta^2 x$ heißt eigentlich die zweite Differenz von x.

§. 9.

Aufgabe.

Die zweite Differenz einer Funkzion finden.

Auflösung. Man nehme die erste Differenz der Funkzion. Man vergrößere darin jede veränderliche Quantität um ihre Differenz, und jede Differenz um ihre zweite Differenz. Hernach subtrahire man die erste Differenz der Funkzion, so bleibet die zweite Differenz.

Exempel. Es sey gegeben $z = xy$, so findet man erstlich

$$\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

Nun schreibe man anstatt x, $x + \Delta x$, anstatt Δx, $\Delta x + \Delta^2 x$, u. s. f.

$$\begin{aligned}
\Delta z + \Delta^2 z &= (y + \Delta y)(\Delta x + \Delta^2 x) + (x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) \\
&\quad + (\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta y + \Delta^2 y) \\
\text{oder } \Delta z + \Delta^2 z &= y\Delta x + x\Delta y + 3\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y \\
&\quad + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y \\
\text{subtr. } \Delta z \ldots\ldots &= y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y \\
\hline
\text{bleibt } \Delta^2 z &= 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y
\end{aligned}$$

Beweis. Wenn x und y zum erstenmal größer werden, so wird

$$z + \Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

Wird nun zu allen veränderlichen Größen mehr als ihre vorige Differenz zugesetzet, so kömt zu x wiederum hinzu $\Delta x + \Delta^2 x$, zu y kömmt hinzu $\Delta y + \Delta^2 y$, zu z, $\Delta z + \Delta^2 z$, folglich wird

$$z + 2\Delta z + \Delta^2 z = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)(y + 2\Delta y + \Delta^2 y)$$

davon abgezogen

$$2\Delta z = 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) - 2xy$$

und noch z oder xy

$$\Delta^2 z = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) + xy$$

Diesen nemlichen Ausdruck erhält man, wenn man nach der gegebenen Regel verfährt. Man nehme die erste Differenz

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy$$

darin setze man $x + \Delta x$ anstatt x, $\Delta x + \Delta^2 x$ anstatt Δx, u. s. f., so bekömt man

$$\Delta z + \Delta^2 z = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) - (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

Hiervon subtrahire man die erste Differenz, nemlich

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy$$

so bleibet wie vorher

$$\Delta^2 z = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) + xy$$

Es ist also das Verfahren, welches in der Regel vorgeschrieben, im Grunde das nemliche, welches zu Anfange dieses Beweises herausgebracht worden.

Zusatz. Mit Gleichungen verfährt man eben so, wie mit Funkzionen, wenn man die zweite Differenzialgleichung suchen will.

§. 10.

Nichts verhindert anzunehmen, daß in einer Funkzion der Zuwachs einer Größe immer mit gleichen Schritten geschehe, und daß eine Größe das zweitemal eben so viel zunehme, als das erstemal. Z. E. xy ist geworden $(x + \Delta x)(y + \Delta y)$. Nun kann man annehmen, daß x das zweitemal wieder um Δx zunimmt, daß aber y jetzt um $\Delta y + \Delta^2 y$ zunimmt. In diesem Falle findet kein $\Delta^2 x$ statt, weil Δx das zweitemal nicht größer ist als das erstemal. Es ist folglich $\Delta^2 x = 0$, und die Sätze, die $\Delta^2 x$ enthalten, fallen weg. Es wird folglich

$$\Delta^2 z = 2\Delta x \Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x \Delta^2 y$$

Sollte auch Δy das zweitemal eben so groß bleiben, als das erstemal, so würde auch $\Delta^2 y = 0$, und

$$\Delta^2 z = 2\Delta x \Delta y$$

§. 11.

Eben so wie die Größen in einer Funkzion zum zweitenmale zunehmen, so können sie noch zum dritten, viertenmale, u. s. f. zunehmen. Der Unterschied zwischen dem ersten und zweiten, dem zweiten und dritten, dem dritten und vierten Werthe, u. s. f., welchen eine zunehmende Größe erlanget, heißt allemal die erste Differenz. Der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden ersten Differenzen, heißt allemal die zweite Differenz. Der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden zweiten Differenzen ist eine dritte Differenz. Der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden dritten Differenzen ist allemal die vierte Differenz, u. s. f. Alle diese nach und nach entstehende Differenzen, heißen **Differenzen von einer höhern Ordnung**, oder **von einem höheren Grade**, und die Gleichungen, welche die Verhältnisse dieser Differenzen ausdrücken, werden ebenfalls nach Graden oder Ordnungen gezählet. Eine Gleichung, wo nur Differenzen von der ersten Ordnung vorkommen, als Δx, Δy, Δz, ist eine Differenzialgleichung von der ersten Ordnung oder vom ersten Grade. Wenn $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$, u. s. f. in der Gleichung enthalten sind, so ist sie vom zweiten Grade oder von der zweiten Ordnung.

Uebrigens werden die höheren Differenzen entweder durch die Wiederholung des Δ oder durch ein einziges Δ mit einer kleinen Ziffer neben bei angedeutet. Also sind die auf einander folgenden Differenzen von z.

$$\Delta z,\ \Delta\Delta z,\ \Delta\Delta\Delta z,\ \Delta\Delta\Delta\Delta z,\ \text{u. s. f.}$$
$$\text{oder}\quad \Delta z,\ \Delta^2 z,\ \Delta^3,\ \Delta^4 z,\ \text{u. s. f.}$$

Man hüte sich, diese kleine Ziffern mit den Exponenten der Potenzen zu verwechseln.

$\Delta^4 z$, heißt die vierte Differenz von z.
$(\Delta z)^4$ oder Δz^4, heißt die vierte Potenz von Δz.
$\Delta(z^4)$, heißt die Differenz von z^4.

§. 12.

Aufgabe.

Die dritte Differenz einer Funkzion finden.

Auflösung. Man suche erstlich die zweite Differenz. Wenn diese gefunden, so setze man darin

$$z + \Delta z \quad \text{anstatt} \quad z$$
$$\Delta z + \Delta^2 z \quad \text{anstatt} \quad \Delta z$$
$$\Delta^2 z + \Delta^3 z \quad \text{anstatt} \quad \Delta^2 z$$

und eben so vergrößere man alle veränderliche Größen, sowohl als ihre erste und zweite Differenzen. Hernach subtrahire man die zweite Differenz, so bleibet die dritte.

Exempel. Es sey verlanget die dritte Differenz von xy, man setze $z = xy$, so bekömt man (§. 9.)

$$\Delta^2 z = 2\Delta x\,\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\,\Delta^2 y + 2\Delta y\,\Delta^2 x + \Delta^2 x\,\Delta^2 y$$

Man vergrößere nun gehörigermaßen alle veränderliche Quantitäten und ihre Differenzen:

$\Delta^2 z$ wird . . . . $\Delta^2 z + \Delta^3 z$

$2\Delta x\Delta y$ wird $2(\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta y + \Delta^2 y) = 2\Delta x\,\Delta y + 2\Delta x\,\Delta^2 y + 2\Delta y\,\Delta^2 x + 2\Delta^2 x\,\Delta^2 y$

$y\Delta^2 x$ wird $(y + \Delta y)(\Delta^2 x + \Delta^3 x) = y\Delta^2 x + y\Delta^3 x + \Delta y\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^3 x$

$x\Delta^2 y$ wird $(x + \Delta x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) = x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + \Delta x\,\Delta^2 y + \Delta x\,\Delta^3 y$

$2\Delta x\Delta^2 y$ wird $2(\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) = 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^3 y + 2\Delta^2 x\Delta^2 y + 2\Delta^2 x\Delta^3 y$

$2\Delta y\Delta^2 x$ wird $2(\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta^2 x + \Delta^3 x) = 2\Delta y\Delta^2 x + 2\Delta y\Delta^3 x + 2\Delta^2 y\Delta^2 x + 2\Delta^3 y\Delta^3 x$

$\Delta^2 x\Delta^2 y$ wird $(\Delta^2 x + \Delta^3 x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) = \Delta^2 x\Delta^2 y + \Delta^2 x\Delta^3 y + \Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\,\Delta^3 y$

Es muß also seyn

$$\Delta^2 z + \Delta^3 z = 2\Delta x\Delta y + 5\Delta x\Delta^2 y + 5\Delta y\Delta^2 x + 7\Delta^2 x\Delta^2 y + y\Delta^2 x + y\Delta^3 x + 3\Delta y\Delta^3 x + x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y + 3\Delta^2 x\Delta^3 y + 3\Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\Delta^3 y$$

Hiervon subtrahire man

$$\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$$

so wird bleiben

$$\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + 3\Delta y\Delta^2 x + 6\Delta^2 x\Delta^2 y + y\Delta^3 x + 3\Delta y\Delta^3 x + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y + 3\Delta^2 x\Delta^3 y + 3\Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\Delta^3 y$$

Beweis. Wir wollen setzen, eine veränderliche Größe nehme folgendermaßen zu: Sie sey erstlich z, und werde $z + \Delta z$, hernach $z + 2\Delta z + \Delta^2 z$, weiter $z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$. So entstehen die Differenzen folgendermaßen:

	1ste Differenzen.	2te Diff.	3te D.
z : : : : : : : : :			
$z+\Delta z$: : : : : :	Δz : : : : : :		
$z+2\Delta z+\Delta^2 z$: : :	$\Delta z+\Delta^2 z$: : :	$\Delta^2 z$	
$z+3\Delta z+3\Delta^2 z+\Delta^3 z$	$\Delta z+2\Delta^2 z+\Delta^3 z$	$\Delta^2 z+\Delta^3 z$	$\Delta^3 z$

Hier hat man die ersten Differenzen gefunden, indem man jeden folgenden Werth der veränderlichen Größe von der vorhergehenden abgezogen hat. Die zweite Differenzen hat man gefunden, indem man eben so mit den ersten Differenzen verfahren ist. Die dritte Differenz ist auch auf der nemlichen Art entstanden.

Daraus siehet man zugleich, daß wenn man die dritte Differenz finden will, angenommen werden muß, daß die veränderlichen Größen eben so, wie hier z, nach und nach zunehmen. Gesetzt also, es wird die dritte Differenz von $z = xy$ verlanget, so entstehet bei dem dritten Zuwachs der Größen

$$z+3\Delta z+3\Delta^2 z+\Delta^3 z=(x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x).(y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)$$

Hiervon subtrahire man

I) $3\Delta^2 z=3(x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)-6(x+\Delta x)(y+\Delta y)+3xy$ (§. 9)

II) $3\Delta z=$ . . . . $3(x+\Delta x)(y+\Delta y)-3xy$

III) $z=$ . . . . xy

$$z+3\Delta z+3\Delta^2 z=3(x+2\Delta y+\Delta^2 x).(y+2\Delta y+\Delta^2 y)-3(x+\Delta x)(y+\Delta y)+xy$$

so bleibet übrig

$$\Delta^3 z=(x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x)(y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)-3(x+2\Delta y+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)+3(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy$$

Nun verfahre man nach der gewöhnlichen Regel. Nemlich man nehme die zweite Differenz (§. 9).

$$\Delta^2 z=(x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta^2 y)-2(x+\Delta x)(y+\Delta y)+xy$$

Man setze darin

$\Delta^2 z+\Delta^3 z$ anstatt $\Delta^2 z$
$x+\Delta x$ anstatt x
$\Delta x+\Delta^2 x$ anstatt Δx
$\Delta^2 x+\Delta^3 x$ anstatt $\Delta^2 x$
$y+\Delta y$ anstatt y
$\Delta y+\Delta^2 y$ anstatt Δy
$\Delta^2 y+\Delta^3 y$ anstatt $\Delta^2 y$

so bekömt man

$$\Delta^2 z+\Delta^3 z=(x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x)(y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)-2(x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)+(x+\Delta x)(y+\Delta y)$$

Hiervon subtrahire man die zweite Differenz, das ist,

$$\Delta^2 z=(x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)-2(x+\Delta x)(y+\Delta y)+xy$$

so wird übrig bleiben

$$\Delta^3 z=(x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x)(y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)-3(x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)+3(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy.$$

Dieser

Dieser Werth von $\Delta^3 z$ ist vollkommen demjenigen gleich, welcher vorher durch den Beweis gefunden wurde. Also hat die Regel ihre völlige Richtigkeit.

Zusatz. Will man annehmen, daß eine von der veränderlichen Größen immer gleichförmig zunimmt, so werden ihre zweite, dritte, und überhaupt alle höhere Differenzen derselben o oder nichts. Die erste Differenz derselben kann als beständig angesehen werden. Z. E. Gesetzt, eine Größe x nimt beständig um Δx zu, so ist sie

		Erste Diff	Zweite Diff.	Dritte Diff.
erstlich	x : : :			
hernach	$x+\Delta x$	Δx : : :		
ferner	$x+2\Delta x$	Δx : : :	0 : : : :	0
ferner	$x+3\Delta x$	Δx : : :	0 : : : :	
	&c. &c.			

Gesetzet also, man hat in der Differenz einer Funkzion Δx als veränderlich angesehen: will man nun, daß Δx beständig bleiben soll, so muß man alle Sätze ausstreichen, welche $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$ enthalten. Z. E. Nachdem man gefunden hat

$$\Delta^3 z = 3\Delta x \Delta^2 y + 3\Delta y \Delta^2 x + 6\Delta^2 x \Delta^2 y + y\Delta^3 x + 3\Delta y \Delta^3 x + x\Delta^3 y + 3\Delta x \Delta^3 y + 3\Delta^2 x \Delta^3 y + 3\Delta^2 y \Delta^3 x + \Delta^3 x \Delta^3 y$$

bekömt man, wenn Δx unveränderlich ist,

$$\Delta^3 z = 3\Delta x \Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x \Delta^3 y$$

oder wenn Δy, unveränderlich ist,

$$\Delta^3 z = 3\Delta y \Delta^2 x + y\Delta^3 x + 3\Delta y \Delta^3 x$$

Man kann auch sogleich bei der zweiten und dritten Differenz der Funkzion Δx oder Δy unverändert lassen. Z. E. Wenn Δx beständig seyn soll, und man soll die dritte Differenz von $z = xy$ suchen, so suche man anfänglich die erste, welche seyn wird

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$$

Nun

Nun vergrößere man Δz, y, Δy, und x, aber nicht Δx, so entstehet

$$\Delta z + \Delta^2 z = (x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (y + \Delta y)\Delta x + \Delta x(\Delta y + \Delta^2 y)$$

oder $\Delta z + \Delta^2 z = x\Delta y + y\Delta x + 3\Delta x\,\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\,\Delta^2 y$

subtr. $\Delta z \ldots = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\,\Delta y$

bleibet $\Delta^2 z = \ldots\ldots\ldots 2\Delta x\,\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\,\Delta^2 y$

Man lasse wiederum Δx unverändert, und vergrößere nur $\Delta^2 z$, x, Δy, und $\Delta^2 y$, so kömt

$$\Delta^2 z + \Delta^3 z = 2\Delta x(\Delta y + \Delta^2 y) + (x + \Delta x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + 2\Delta x(\Delta^2 y + \Delta^3 y)$$

oder $\Delta^2 z + \Delta^3 z = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 5\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$

subtr. $\Delta^2 z \ldots = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$

bleibet .... $\Delta^3 = \ldots\ldots\ldots 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$

§. 13.

Aufgabe.

Die *n*te Differenz einer Funkzion finden.

Auflösung. Man suche erstlich die $(n - 1)$te Differenz. In dieser vergrößere man sowohl die veränderlichen Größen, als ihre schon vorhandene Differenzen, nemlich man setze

$x + \Delta x$ anstatt x

$\Delta^m x + \Delta^{m+1} x$ anstat $\Delta^m x$

indem hier unter m jede Zahl verstanden wird, welche die Ordnung der Differenz anzeiget, und unter x jede veränderliche Größe.

Wenn dieses geschehen ist, so subtrahire man die $(n - 1)$ Differenz. Was übrig bleibet, ist die *n*te Differenz.

Wenn die erste Differenz einer veränderlichen Größe in der Funkzion als unveränderlich angesehen werden soll, so wird diese Differenz nicht mehr vergrößert, sondern sie bleibet wie sie ist.

Exem-

Exempel. Laßt uns die vierte Differenz suchen von $z=xy$, indem wir Δx als beständig annehmen. Die dritte Differenz war.

$$\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$$

Daraus entstehet, wenn man alles Veränderliche vergrößert,

$$\Delta^3 z + \Delta^4 z = 3\Delta x(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + (x + \Delta x)(\Delta^3 y + \Delta^4 y) + 3\Delta x(\Delta^3 y + \Delta^4 y)$$

oder $\Delta^3 z + \Delta^4 z = 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 7\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$

subtr. $\Delta^3 z$ .. $= 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$

bleibet $\Delta^4 z =$ .... $4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$

Beweis. Der Beweis kann für jeden Grad insbesondere ohngefähr wie beim dritten geführet werden, wenn man nur annimmt, daß jede veränderliche Größe folgenmaßen zunimmt:

Erstlich ist sie z

hernach wird sie $z + \Delta z$

ferner $z + 2\Delta z + \Delta^2 z$

$z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$

$z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 z + \Delta^4 z$

$z + 5\Delta z + 10\Delta^2 z + 10\Delta^3 z + 5\Delta^4 z + \Delta^5 z$.

&c. &c.

Die Koeffizienten folgen hier in der nemlichen Ordnung, wie bei den binomischen Potenzen.

Anmerkung I. Gleichungen werden eben so behandelt, wie Funkzionen. Man kann auch zu jedem Satze der Gleichung besonders die Differenz suchen, wie schon beim ersten Grade angemerket worden.

Anmerkung II. Wir haben immer vorausgesetzet, daß die veränderlichen Größen alle zunehmen. Sollen einige abnehmen, so darf man nur in der gefundenen Differenz der Funkzion vor jedem Satze, worin die negative

Differenz enthalten ist, das Zeichen verändern. Jedoch nehme man den Fall aus, wo die negativen Differenzen eine paarige Anzahl von Dimensionen ausmachen. In diesem Falle behält der Saz sein Zeichen, wie aus der Multiplikazion bekannt ist. Z. E. Man hat gefunden

$$\Delta^4 z = 4\Delta x \Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x \Delta^4 y$$

Soll nun x abnehmen, anstatt vergrößert zu werden, so wird Δx negativ, und man bekömt

$$\Delta^4 z = -4\Delta x \Delta^3 y + x\Delta^4 y - 4\Delta x \Delta^4 y$$

Soll hingegen x zunehmen und y abnehmen, so werden $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ negative Größen, und

$$\Delta^4 z = -4\Delta x \Delta^3 y - x\Delta^4 y - 4\Delta x \Delta^4 y$$

Sollen x und y beide abnehmen, so werden die Differenzen von x und y negativ, und

$$\Delta^4 z = +4\Delta x \Delta^3 y - x\Delta^4 y + 4\Delta x \Delta^4 y$$

Hier ist $4\Delta x \Delta^3 y$ positiv, weil $(-\Delta x) \times (-\Delta^3 y) = +\Delta x \Delta^3 y$. Aus der nemlichen Ursache ist der lezte Saz positiv.

Ob die Differenz der Funkzion selbst, als hier $\Delta^4 z$, positiv oder negativ seyn soll, muß man nicht vorher bestimmen. Dieses hänget von der Zunahme und Abnahme der veränderlichen Größen ab. Z. E. Da wir für den Fall, wo Δx beständig und Δy negativ ist, gefunden haben

$$\Delta^4 z = -4\Delta x \Delta^3 y - x\Delta^4 y - 4\Delta x \Delta^4 y$$

so siehet man, daß die vierte Differenz von xy in diesem Falle einen negativen Werth bekömmt.

§. 14.

Die erste Differenz einer Funkzion einer einzigen veränderlichen Größe x, kann allemal durch eine Reihe von folgender Gestalt vorgestellet werden:

$$\pm A + B\Delta x^2 \pm C\Delta x^3 + D\Delta x^4 \pm E x^5 + \&c.$$

wo die Koeffizienten A, B, C, D, E, &c. nicht, wie sonst ge-

gewöhnlich, beständige Größen, sondern Funkzionen von x bedeuten.

Denn es kann die Differenz der Funkzion nichts anders seyn als eine Funkzion von Δx, x, und bekannten Größen. Siehet man nur allein auf Δx, und behandelt x als eine bekannte oder beständige Größe, so hat man eine bloße Funkzion von Δx und beständigen Größen. Diese Funkzion von Δx kann nun, vermöge des 17ten Paragraphs im vorigen Hauptstücke in eine Reihe verwandelt werden, welche die obgemeldete Gestalt hat.

Es sey gegeben diese Funkzion

$$\frac{x}{1+2x}$$

Wenn man x um Δx vergrößert, und dann die gegebene Funkzion abziehet, so kömt für die erste Differenz

$$\frac{x+\Delta x}{(1+2x)+2\Delta x} - \frac{x}{1+2x}$$

Man setze nun, es sey

$$\frac{x+\Delta x}{(1+2x)+2\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \&c.$$

Multipliziret man beiderseits mit dem Nenner, so wird

$$\begin{aligned} x+1\Delta x = (1+2x)A + (1+2x)B\Delta x &+ (1+2x)C\Delta x^2 + \&c. \\ +2A\Delta x &+ 2B\Delta x^2 + \&c. \end{aligned}$$

Vergleichet man nun die unbestimmten und veränderlichen Koeffizienten, so muß seyn

$$\begin{aligned} x &= (1+2x)\,A \\ 1 &= (1+2x)\,B + 2\,A \\ 0 &= (1+2x)\,C + 2\,B \\ &\&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Daher

Daher bekömt man

$$A = \frac{x}{1+2x}$$

$$B = \frac{1}{(1+2x)^2}$$

$$C = \frac{-2}{(1+2x)^3}$$

Folglich ist

$$\frac{x+\Delta x}{1+2x+2\Delta x} = \frac{x}{1+2x} + \frac{1}{(1+2x)^2}\Delta x - \frac{2}{(1+2x)^3}\Delta x^2 + \&c.$$

und wenn man beiderseits $\frac{x}{1+2x}$ subtrahiret

$$\frac{x+\Delta x}{1+2x+2\Delta x} - \frac{x}{1+2x} = \frac{1}{(1+2x)^2}\Delta x - \frac{2}{(1+2x)^3}\Delta x^2 + \&c.$$

oder auch

$$\Delta\left(\frac{x}{1+2x}\right) = \frac{1}{(1+2x)^2}\Delta x - \frac{2}{(1+2x)^3}\Delta x^2 + \&c.$$

Auf einer ähnlichen Art kann man allemal in dergleichen Fällen verfahren, um die Differenz durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Das zweideutige Zeichen $\pm$ in der Formel zeiget an, daß, wenn x abnehmen und folglich Δx negativ seyn soll, die Zeichen in den Sätzen, wo unpaarige Exponenten sind, verändert werden müssen.

§. 15.

Wenn von einer heterogenen Funkzion zweier veränderlicher Größen x und y, die Differenz genommen wird, so enthält diese Differenz der Funkzion: I) Eine heterogene Funkzion von Δx und Δy, die um einen Grad niedriger ist, und deren Koeffizienten wiederum Funkzionen von x und y sind. II) Eine homogene Funkzion von Δx und Δy, welche vom nemlichen Grade ist, als die gegebene, und die nemlichen Koeffizienten hat.

Bayerische Staatsbibliothek München

Es sey gegeben folgende heterogene Funkzion vom dritten Grade:

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3$$

Wenn ihr von dieser Funkzion der Größen x und y die Differenz suchet, und die Sätze zusammen bringet, welche mit den nemlichen Differenzen multipliziret sind, so bekommet ihr

$$(\beta + 2\delta x + \varepsilon y + 3\eta x^2 + 2\theta xy + \iota y^2)\,\Delta x$$
$$+ (\gamma + \varepsilon x + 2\zeta y + \theta x^2 + 2\iota xy + 3\varkappa y^2)\,\Delta y$$
$$+ (\delta + 3\eta x + \theta y)\,\Delta x^2$$
$$+ (\varepsilon + 2\theta x + 2\iota y)\,\Delta x\,\Delta y$$
$$+ (\zeta + \iota x + 3\varkappa y)\,\Delta y^2$$
$$+ \eta\,\Delta x^3$$
$$+ \theta\,\Delta x^2\,\Delta y$$
$$+ \iota\,\Delta y^2\,\Delta x$$
$$+ \varkappa\,\Delta y^3$$

Benennet man nun mit A, B, C, u. s. f. die Funkzionen, welche hier in Haken eingeschlossen sind, so hat man zur Differenz

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta x^2 + D\,\Delta x\,\Delta y + E\,\Delta y^2$$
$$+ \eta\,\Delta x^3 + \theta\,\Delta x^2\,\Delta y + \iota\,\Delta y^2\,\Delta x + \varkappa\,\Delta y^3$$

Ueberhaupt, wenn die gegebene heterogene Funkzion vom $n$ten Grade ist, so bekömt die Differenz folgende Gestalt:

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta x^2 + D\,\Delta x\,\Delta y + \&c.\,\&c.\ldots\; K\,\Delta y^{n-1}$$
$$+ a\,\Delta x^n + b\,\Delta x^{n-1}\,\Delta y + c\,\Delta x^{n-2}\,\Delta y^2 + \&c.\,\&c.\ldots\; k\,\Delta y^n$$

Hier sind A, B, C, D, &c. K, lauter Funkzionen von x und y. Hingegen a, b, c, &c. k, sind die lezten Koeffizienten der Funkzion, nemlich die Koeffizienten, welche die Sätze in der Gleichung haben, wenn man x anstatt Δx und y anstatt Δy sezet.

§. 16.

Wenn man von einer ganzen und razionalen Funkzion der Größe x die Differenzen nimmt, und Δx als beständig

dig betrachtet, so gehen die Differenzen nur bis zum *n*ten Grade, wenn die Funkzion selbst von der *n*ten Ordnung ist. Die Differenz vom $(n+1)$ten Grade, wie auch alle folgenden sind null.

Es sey $y = x^n$, so wird, wenn Δx als beständig angesehen wird,

$$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

$$\Delta^2 y = n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} 6 x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)x^{n-3}\Delta x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} 36 x^{n-4}\Delta x^4$$

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\Delta x^4 + \&c.$$

Man wird leicht einsehen, daß diese auf einander folgende Differenzen nicht weiter als bis zur *n*ten Differenz gehen können. Gesetzt, es sey $y = x^3$, so wird

$$\Delta^3 y = 3(3-1)(3-2)x^{3-3}\Delta x^3 = 6\Delta x^3$$

Es müßte nun seyn

$$\Delta^4 y = 3(3-1)(3-2)(3-3)x^{3-4}\Delta x^4 + \&c.$$

Da hier $3-3=0$, so wird der ganze Ausdruck zu nichts. Weil aber dieses $3-3$ in allen folgenden und höheren Differenzen vorkömmt, so sind sie alle ebenfalls null.

Jede ganze und razionale Funkzion kann also vorgestellet werden:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c. \ldots + \varkappa x^n$$

wenn sie nemlich von der *n*ten Ordnung ist. Wenn man von allen Sätzen dieser Funkzion nach und nach die Differenzen suchet, so siehet man aus vorigem Exempel, daß βx keine Differenz über die erste haben kann, γx^2 keine über die zweite, δx^3 keine über die dritte, u. s. f. endlich $\varkappa x^n$ keine über die *n*te. Also kann die ganze Funkzion keine Differenz über den *n*ten Grad haben.

Funfzehntes Hauptstück.

Von der Erfindung der Funkzionen aus ihren Differenzen, und von den Reihen.

§. 1.

Nachdem wir im vorigen Hauptstücke gelehret haben, wie man die Differenz einer jeden Funkzion finden kann, so müssen wir jezt auch zeigen, wie man die Funkzion wieder finden kann, woraus eine gegebene Differenz entstanden ist. Aber dieser Theil der höheren Rechenkunst ist weit schwerer, als der vorige; oder es ist vielmehr diese Rechnungs-Art eine beinahe ganz neue Kunst, worinn noch vieles zu entdecken ist. Wir wollen nur dem Leser das nöthigste darans mittheilen.

§. 2.

Die Summe einer Funkzion, worinn Differenzen vorkommen, heisset so viel, als eine Funkzion, woraus die gegebene Differenzial-Funkzion entstanden ist oder entstehen kann. Diese Summe wird angedeutet durch den griechischen Buchstaben Σ. Folglich bedeutet dieser Ausdruck

$$\Sigma(x\Delta y + yx\Delta + \Delta x\Delta y)$$

die Summe von $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$, das ist, eine Funkzion von x und y woraus $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$ entstehet, wenn man ihre Differenz nimmt. In dem angeführten Exempel ist es aus dem vorhergehenden klar, daß die verlangte Summe in der Funkzion xy bestehet, also ist

$$\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = xy.$$

§. 3.

Die Zeichen Σ und Δ heben einander auf, und verschwinden beide, wenn sie neben einander vor der nemlichen Größe stehen. Z. E.

$$\Delta\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

$$\Sigma\Delta(xy) = xy$$

In der ersten dieser beiden Gleichungen ist

$$\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = xy \quad (\S. 2)$$

Nimmt man beiderseits die Differenzen, so kömmt

$$\Delta\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

wo man siehet, daß Δ und Σ einander aufheben. In der anderen Gleichung ist

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

nimmt man nun beiderseits die Summe, so ist

$$\Sigma\Delta(xy) = xy$$

wo die Zeichen Σ und Δ wiederum einander aufheben.

Anmerkung. Man verwechsle die Bedeutungen, welche die Wörter Differenz und Summe in der Lehre von den Funkzionen annehmen, nicht mit dem Sinne den sie sonst in der Arithmetik und Algebra zu haben pflegen. Die Erfinder hätten freilich behutsamer seyn können, um solche zweideutige Wörter zu vermeiden. Weil sie aber schon eingeführet sind, so laßen sie sich nicht gut aus dem Gebrauche bringen. Wir wollen in diesem Hauptstücke allemal die Wörter Unterschied und Aggregat gebrauchen, wenn von den gewöhnlichen arithmetischen oder algebraischen Operazionen die Rede seyn wird.

§. 4.

Die Differenz einer Funkzion entstehet, indem man für jeden Satz insbesondere die Differenz suchet. Wenn also die Summe einer Differenzial-Funkzion, oder Differenzial-

zial-Gleichung gefunden werden soll, so kann man ebenfalls die Summe eines jeden Satzes für sich suchen. Gesetzet also, man habe eine solche Differenzial-Gleichung vor sich

$$\Delta u + \Delta x = \Delta y - \Delta z$$

so kann die Summe geschrieben werden

$$\Sigma(\Delta u + \Delta x) = \Sigma(\Delta y - \Delta z)$$

oder, indem man das Zeichen Σ vor jedem Satze schreibet

$$\Sigma\Delta u + \Sigma\Delta x = \Sigma\Delta y - \Sigma\Delta z$$

welches in diesem Falle eben so viel wäre, als

$$u + x = y - z$$

Siehe §. 3.

§. 5.

Wenn in einem Produkte beständige Größen vorkommen, so kann man bemerken, daß es gleich viel ist, ob man die beständigen Größen hinter oder vor dem Zeichen Δ schreibe. Es ist z. E.

$$\Delta ax = a\Delta x$$

$$\Delta axy = a\Delta xy = a(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y)$$

$$\Delta\frac{x}{a} \text{ oder } \Delta\frac{1}{a}x = \frac{1}{a}\Delta x \text{ oder } \frac{\Delta x}{a}$$

Hieraus folget, daß in der Summe die beständigen Faktoren sowohl vor als nach dem Zeichen Σ stehen können. Z. E.

$$\Sigma\Delta ax = \Sigma a\Delta x = a\Sigma\Delta x = ax$$

$$\Sigma\Delta axy = \Sigma a\Delta xy = a\Sigma\Delta xy = axy$$

$$\Sigma\Delta\frac{1}{a}x = \Sigma\frac{1}{a}\Delta x = \frac{1}{a}\Sigma\Delta x = \frac{1}{a}x$$

&c. &c.

§. 6.

§. 6.

Aufgabe.

Die Summe von Δx^n finden, indem man weiß, daß Δx als beständig angesehen wird.

Auflösung. Es ist allemal

$$\Sigma(\Delta x^n) = x\Delta x^{n-1}$$

Exempel.

$$\Sigma\Delta x^4 = x\Delta x^3$$
$$\Sigma\Delta x^7 = x\Delta x^6$$

Beweis. Man nehme die Funkzion $x \,.\, \Delta x^{n-1}$, und suche ihre Differenz, indem man $x + \Delta x$ anstatt x schreibet, und Δx unverändert läßt, hernach aber die gegebene Funkzion subtrahiret.

$$(x + \Delta x)\Delta x^{n-1} = x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n$$

subtr. $x\Delta x^{n-1}$

bleibet . . . Δx^n

Es ist also Δx^n die Differenz von $x\Delta x^{n-1}$, folglich ist $x\Delta x^{n-1}$ die Summe von Δx^n.

Anmerkung. Man muß sich nicht wundern, daß die Summe einer Differenzial-Funkzion wiederum eine Differenzial-Funkzion werden kann. Denn eben so, wie zu einer Funkzion mehr als einmal die Differenz gesuchet werden kann, so kann auch, wenn man rückwärts gehet, mehr als einmal die Summe gesuchet werden. Z. E. Wir haben im vorigen Hauptstücke gefunden, wenn Δx als beständig betrachtet wird

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$
$$\Delta^2(xy) = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$$
$$\Delta^3(xy) = 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$$
$$\Delta^4(xy) = 4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$$

Würde nun die Summe verlanget von

$$4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$$

oder die Funkzion wovon diese Funkzion die Differenz ist, so könnte, wenn Δx als beständig betrachtet wird, die verlangte Summe nichts anders seyn, als die vorige Differenz, nemlich

$$3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$$

Hiervon wäre wiederum die Summe

$$2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$$

und hiervon die Summe

$$x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

Endlich hiervon die Summe

$$xy$$

Wenn also eine Differenz von der $n$ten Ordnung gegeben ist, so muß auch $n$mal die Summe gesuchet werden, bis daß man auf die erste Funkzion kömmt, welche keine Differenzen enthält.

§. 7.

Aufgabe.

Die Summe von $x^n\Delta x$ finden.

Auflösung. Man gebrauche folgende Formeln

$$\Sigma(x\Delta x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$$

$$\Sigma(x^2\Delta x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$$

$$\Sigma(x^3\Delta x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4}$$

&c. &c.

Beweis.

Beweis. Die erste Formel wird also beweisen. Wenn man von x^2 die Differenz nimmt, so kömmt

$$\Delta(x^2) = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Man nehme die Summen, so kömmt

$$x^2 = 2\Sigma x\Delta x + \Sigma\Delta x^2$$

daher $x^2 - \Sigma\Delta x^2 = 2\Sigma x\Delta x$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{\Sigma\Delta x^2}{2} = \Sigma x\Delta x$$

Es ist aber vermöge voriger Aufgabe $\Sigma\Delta x^2 = x\Delta x$, folglich

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2} = \Sigma(x\Delta x)$$

welches die erste Formel ist. Die zweite Formel wird auf ähnlicher Art gefunden: es ist

$$\Delta(x^3) = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

Wenn man die Summen nimmt, so kömmt

$$x^3 = 3\Sigma x^2\Delta x + 3\Sigma x\Delta x^2 + x\Delta x^2$$

Um den Satz $3\Sigma x\Delta x^2$ zu finden, betrachte man, daß Δx als beständig angesehen wird. Also ist $3\Sigma x\Delta x^2$ oder $3\Sigma x\Delta x\Delta x = 3\Delta x . \Sigma x\Delta x$. Es ist aber aus voriger Formel $\Sigma x\Delta x = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$, folgl. $3\Delta x\,\Sigma x\Delta x = \frac{3x^2\Delta x}{2} - \frac{3x\Delta x^2}{2}$

Setzet man diesen Werth in die lezte Gleichung, so kömt

$$x^3 = 3\Sigma x^2\Delta x + \frac{3x^2\Delta x}{2} - \frac{3x\Delta x^2}{2} + x\Delta x^2$$

oder $2x^3 = 6\Sigma x^2\Delta x + 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 + 2x\Delta x^2$

oder $2x^3 = 6\Sigma x^2\Delta x + 3x^2\Delta x - x\Delta x^2$

daher $2x^3 - 3x^2\Delta x + x\Delta x^2 = 6\Sigma x^2\Delta x$

und $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6} = \Sigma x^2\Delta x$

Um die dritte Formel zu finden, betrachte man, daß

$$\Delta(x^4) = 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4$$

Man suche die Summen der Sätze

I) $\Sigma\Delta(x^4) = x^4$

II) $\Sigma 4x^3\Delta x = 4\Sigma x^3\Delta x$

III) $6\Sigma x^2\Delta x^2 = 6\Delta x\Sigma x^2\Delta x$. Da aus voriger Formel $\Sigma x^2\Delta x$ gefunden worden, so darf man dieselbe nur mit $6\Delta x$ multiplіziren, und man bekömmt

$$2x^3\Delta x - 3x^2\Delta x^2 + x\Delta x^3$$

IV) $4\Sigma x\Delta x^3 = 4\Delta x^2\Sigma x\Delta x$. Da aus der ersten Formel $\Sigma x\Delta x$ gefunden worden, so multiplizire man noch jene Formel mit $4\Delta x^2$, so hat man $2x^2\Delta x^2 - 2x\Delta x^3$

V) $\Sigma\Delta x^4 = x\Delta x^3$, aus voriger Aufgabe.

Setzet man nun alle diese Summen zusammen, so wird

$$\begin{aligned} x^4 = 4\Sigma x^3\Delta x + 2x^3\Delta x - 3x^2\Delta x^2 &+ x\Delta x^3 \\ + 2x^2\Delta x^2 &- 2x\Delta x^3 \\ &x\Delta x^3 \end{aligned}$$

$$x^4 = 4\Sigma x^3\Delta x + 2x^3\Delta x - x^2\Delta x^2$$

oder $x^4 - 2x^3\Delta x + x^2\Delta x^2 = 4\Sigma x^3\Delta x$

oder $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4} = \Sigma x^3\Delta x$

Auf einer ähnlichen Art ließen sich die Formeln und deren Beweise weiter fortsetzen.

§. 8.

Aufgabe.

Die Summe von Δx^n und $x^n\Delta x$ finden, in dem Falle wo $\Delta x = 1$.

Auflösung. Man bediene sich der Formeln die in beiden vorigen Aufgaben angeführet worden, und setze in densel-

denselben allenthalben 1 für Δx. Auf dieser Art bekömmt man die gehörigen Formeln.

Weil

$$\Sigma\Delta x^n = x\Delta x^{n-1}$$

$$\Sigma x\Delta x = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$$

$$\Sigma x^2\Delta x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$$

$$\Sigma\,(x^3\Delta x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4}$$

so wird, wenn $\Delta x = 1$

$$\Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$

§. 9.

Wenn man die Differenz einer Funkzion suchet, so verschwindet allemal der Satz, welcher bloß beständige Grössen enthält. Es sey

$$ax = b + cy$$

so ist die Differenzial-Gleichung

$$a\Delta x = c\Delta y$$

hier ist die beständige Größe verschwunden; und nimmt man die Summen, so kömmt nur

$$ax = cy$$

wo das b gänzlich mangelt. Deswegen muß man, wenn man wie gewöhnlich die Summe einer Funkzion gefunden hat

hat, noch eine willkürliche beständige Größe (constante arbitraire) zusetzen. Zum Exempel, man hat gefunden, daß wenn $\Delta x = 1$, so ist

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

Diese Summe ist aber noch nicht vollständig, sondern man muß sagen

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C$$

indem man unter C alle mögliche beständige Größen verstehet. Man kann z. E. annehmen $C = 0$, $C = 1$, $C = 2$, $C = \sqrt{3}$, u. s. f. Jeder Werth, den man der Größe C giebt, wird der gefundenen Summe auch einen besonderen Werth geben. So viel man also verschiedene Werthe von C annimmt, so viel bekömmt man besondere Summen, die alle in der allgemeinen Summe, welche das C bei sich führet, begriffen sind.

Uebrigens, weil in einer Funkzion oder Gleichung, alle bloß bekannte Sätze als ein einziger betrachtet werden können, so braucht man bei der Summe auch nur eine einzige willkürliche Größe ansetzen, welche jede einfache oder komplexe beständige Größe vorstellen kann.

§. 10.

Aufgabe.

Den Werth der willkürlichen Größe für jeden besonderen Fall finden.

Auflösung. Wenn man die Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen gefunden hat, so bestimme man, aus der Natur der Aufgabe, oder aus freiem Willen, welchen bestimmten Werth die eine veränderliche Größe bekommen soll, wenn die andere auch einen gewissen Werth bekömmt. Diese bestimmten Werthe setze man in die Gleichung, so kann man den gehörigen Werth von C daraus ziehen.

Exem-

Exempel. Es sey

$$\Delta y = a \Delta x$$

so wird $\quad y = ax + C$

Gesetzet man will, daß $y = a^2$ werden soll, wenn $x = 1$ wird, so bekömmt man

$$a^2 = a + C$$
$$a^2 - a = C$$

In diesem Falle muß folglich die besondere Summe also geschrieben werden.

$$y = ax + a^2 - a$$

und in der That, wird hier $x = 1$, so ist

$$y = a + a^2 - a = a^2$$

Gesetzet, man will, daß $y = \frac{1}{2}a$ werden soll, wenn $x = 0$ wird, so hat man

$$\tfrac{1}{2}a = 0 + C$$

oder $\quad \frac{1}{2}a = C$

und die besondere Summe ist für diesen Fall

$$y = ax + \tfrac{1}{2}a$$

wenn hier $x = 0$ wird, so wird y verlangtermaßen $= \frac{1}{2}a$.

Zusatz I. Ist die Gleichung zwischen mehr als zwei veränderlichen Größen, so muß man bestimmen, was eine derselben werden soll, wenn alle anderen einen bestimmten Werth bekommen. Z. E. Gesetzet, man hätte gefunden

$$x^2 y = 3z^3 + C$$

und es soll z werden $= 10$, wenn $x = 1$ und $y = 2$ wird, so bekömmt man

$$2 = 3 \cdot 10^3 + C$$

oder $\quad 2 = 3000 + C$

folglich $\quad \frac{2}{3000} = \frac{1}{1500} = C$

und

und die Gleichung wird

$$x^2y = 3z^3 + \frac{1}{1500}$$

Zusatz II. Wenn man die allgemeine Summe einer Funkzion gesuchet hat, so kann man die Funkzion einer veränderlichen Größe z gleich setzen, und dann bestimmen, was z oder die ganze Funkzion werden soll wenn die veränderlichen Größen einen gewissen Werth bekommen. Es sey gefunden worden

$$ax^2 + bx + C$$

so setze man

$$z = ax^2 + bx + C$$

Soll nun zum Exempel die ganze Funkzion $= 0$ werden, wenn $x = 1$, so ist

$$0 = a + b + C$$
$$-a - b = C$$

folglich $z = ax^2 + bx - a - b$

Zusatz III. Der gewöhnlichste Fall ist dieser, daß die Funkzion einer einzigen veränderlichen Größe null werden soll, wenn die Größe selbst null wird. In diesem Falle muß auch $C = 0$ seyn, oder es ist keine willkürliche Größe zuzusetzen. Denn es sey

$$z = ax + bx^2 + cx^3 + C$$

wird nun $x = 0$ und $z = 0$, so ist

$$0 = 0 + C$$

oder $0 = C$

folglich bleibet die gefundene Funkzion ohne willkürliche Größe.

§. 11.

Wir haben schon oft in diesem Werke Gelegenheit gehabt von Reihen (séries) zu sprechen. Man verstehet darunter

unter meistentheils solche auf einander folgende Säze, wo allemal der folgende auf der nemlichen Art oder nach dem nemlichen Geseze aus den vorhergehenden entstehet.

Man pfleget sich auch die Entstehung einer solchen Reihe so vorzustellen, als wären die Säze lauter verschiedene Werthe, welche eine gewisse Funkzion von x annimmt, wenn x selbst immer um 1 zunimmt. Es sey gesezet diese Funkzion

$$z = 2x^3 + 5x^2 + 7x$$

Wenn wir annehmen

$x = 0$,	so wird	$z =$	0
$x = 1$	: :	$z =$	14
$x = 2$	: :	$z =$	50
$x = 3$	: :	$z =$	120
$x = 4$	: :	$z =$	236
&c.		&c.	

Also bekömmt man diese Reihe

0, 14, 50, 120, 236, u. s. f.

Die Funkzion, woraus die Reihe entstanden, heißt der allgemeine Saz (terme géneral) der Reihe. Also ist

$$2x^3 + 5x^2 + 7x$$

der allgemeine Saz der Reihe

0, 14, 50, 120, 236, u. s. f.

Manchmal stellet man sich auch die Entstehung einer Reihe also vor. Man nehme nach Belieben eine Größe zum Anfang der Reihe. Man nehme noch an, daß die Säze vor dem ersten alle null sind. Man bestimme einige beständige Multiplikatoren. Um nun jeden Saz der Reihe zu bekommen, multiplizire man die vorhergehenden mit den angenommenen Multiplikatoren, nemlich den lezten Saz mit dem lezten Multiplikator, den vorlezten mit dem vorlezten, u. s. f. Man addire die Produkte, und nehme das Aggregat zum gesuchten Saze an.

3. E. Es soll 1 der erste Satz seyn, und die Multiplikatoren sollen seyn 2, 3 und 4.

$$\begin{array}{rl} & 0,\ 0,\ 1 \\ \text{mult.} & \underline{2,\ 3,\ 4} \\ & 0+0+4=4, \text{ zweiter Satz.} \\ & 0,\ 1,\ 4 \\ \text{mult.} & \underline{2,\ 3,\ 4} \\ & 0+3+16=19, \text{ dritter Satz.} \\ & 1,\ 4,\ 19 \\ \text{mult.} & \underline{2,\ 3,\ 4} \\ & 2+12+76=90, \text{ vierter Satz.} \\ & 4,\ 19,\ 90 \\ \text{mult.} & \underline{2,\ 3,\ 4} \\ & 8+57+360=425, \text{ fünfter Satz.} \end{array}$$

Die Reihe wird also seyn:

1, 4, 19, 90, 425, u. s. f.

Die Folge der beständigen Multiplikatoren, als hier 2, 3, 4 heißt der **Maaßstab des Verhältnisses** (échelle de relation). Die Reihe selbst, welche auf solcher Art entstanden ist, heißt eine **rückläufige Reihe** (série recurrente.) Weil aber die Untersuchung dieser Art Reihen viele Schwierigkeiten verursachet, so wollen wir hier die Reihen aus vorigen Gesichtspunkte betrachten, nemlich als Entwickelungen eines allgemeinen Satzes, wobei uns die Lehre von den Summen der Differenzial-Funkzionen sehr zu statten kommen wird.

§. 12.

Den allgemeinen Satz für eine Reihe bestimmter Zahlen finden.

Vorbereitung. Es sey z eine Funkzion von x. Gesetzet, wenn man nach und nach den Werth von x vergrößert, so werde z allmälig

z, z^{I}, z^{II}, z^{III}, z^{IV}, z^{V}, u. s. f. Es

Es ist klar, daß jeder folgende Satz in dieser Reihe entstehen muß, wenn der vorhergehende um seine Differenz vergrößert wird. Weil also der erste Satz z ist, so muß der zweite seyn $z + \Delta z$. Der dritte muß seyn $z + \Delta z$ und noch die Differenz von $z + \Delta z$, nemlich

$$z + \Delta z + \Delta(z + \Delta z) = z + 2\Delta z + \Delta^2 z.$$

Der dritte Satz wird seyn

$$(z + 2\Delta z + \Delta^2 z) + \Delta(z + 2\Delta z + \Delta^2 z) = z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z.$$

Wenn man so fortfähret, so findet man

$$\begin{aligned}
z &= z\\
z^{I} &= z + \Delta z\\
z^{II} &= z + 2\Delta z + \Delta^2 z\\
z^{III} &= z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z\\
z^{IV} &= z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 z + \Delta^4 z\\
z^{V} &= z + 5\Delta z + 10\Delta^2 z + 10\Delta^3 z + 5\Delta^4 z + \Delta^5 z\\
&\quad \&c.\quad \&c.
\end{aligned}$$

Beobachtet man das Gesetz, nach welchem die Sätze auf einander folgen, so siehet man, daß

$$z^{N} = z + N\Delta z + \frac{N(N-1)}{1.\ 2}\Delta^2 z + \frac{N(N-1)(N-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 z + \&c.$$

Diese Formel hat mit der Formel für binomische Potenzen die größte Aehnlichkeit, wie schon im vorigen Hauptstücke §. 13 angemerket worden. Sie drücket den Nten Satz der Reihe aus, wenn der erste nicht mitgerechnet wird, oder den $(N+1)$ten, wenn der erste mitgezählet wird. Man beobachte nur, daß hier N kein Exponent einer Potenz ist, sondern ein algorithmisches Zeichen, welches die Ordnung des Satzes anzeiget. Siehe IV. Hauptstück §. 32.

Es sey nun gegeben eine Reihe Zahlen

$z,\ z^{I},\ z^{II},\ z^{III},$ &c.

oder A, B, C, D, &c.

wozu der allgemeine Satz gefunden werden soll. Wir nehmen an, daß die Reihe aus einer Funkzion von x entstanden

standen ist, worinn man nach und nach dem x die Werthe 0, 1, 2, 3, u. s. f. gegeben hat. Wenn dieses ist, so gilt x im ersten Satze 0, im zweiten 1, im dritten 2, im vierten 3, u. s. f. überhaupt x gilt N im Nten Satze, wenn der erste nicht mitgezählet wird. Folglich kann man in der gefundenen Formel setzen x anstatt N, und es wird

$$z^{N} \text{ oder } Z = z + x\Delta z + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}\Delta^{2} z + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3.}\Delta^{3} z + \&c.$$

Hier ist z^{N} oder Z der so vielte Satz + 1 als x Einheiten vorstellet. Es bleibet nun übrig zu untersuchen, wie Δz, $\Delta^{2} z$, $\Delta^{3} z$, u. s. f. gefunden werden. Man suche wie aus den auf einander folgenden Größen z, z^{I}, z^{II}, z^{III} u. s. f. die erste, zweite, dritte Differenz entstehet.

Funkz.	Erste Diff.	Zweite Differenz.	Dritte Differenz.
z			
z^{I}	$\Delta z = z^{I} - z$	$\Delta^{2} z = z^{II} - 2z^{I} + z$	$\Delta^{3} z = z^{III} - 3z^{II} + 3z^{I} - z$
z^{II}	$\Delta z^{I} = z^{II} - z^{I}$	$\Delta^{2} z^{I} = z^{III} - 2z^{II} + z^{I}$	$\Delta^{3} z^{I} = z^{IV} - 3z^{III} + 3z^{II} - z^{I}$
z^{III}	$\Delta z^{II} = z^{III} - z^{II}$	$\Delta^{2} z^{II} = z^{IV} - 2z^{III} + z^{II}$	
z^{IV}	$\Delta z^{III} = z^{IV} - {}^{III}$		

und so weiter. Die Differenzen sind hier gehörigermaßen gefunden worden, indem man jede Funkzion von der folgenden in der nemlichen Ordnung abgezogen hat. Aus dieser Tafel bekömmt man also

$$\begin{aligned} z &= z \\ \Delta z &= z^{I} - z \\ \Delta^{2} z &= z^{II} - 2z^{I} + z \\ \Delta^{3} z &= z^{III} - 3z^{II} + 3z^{I} - z \\ &\&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

oder wenn man die gegebene Reihe z, z^{II}, z^{III}, z^{IV}, u. s. f. wie oben geschehen durch A, B, C, D, u. s. f. ausdrücket, so ist

$$\begin{aligned} z &= A \\ \Delta z &= B - A \\ \Delta^{2} z &= C - 2B + A \\ \Delta^{3} z &= D - 3C + 3B - A \\ &\&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Setzet

Setzet man nun diese Werthe in der obigen Formel $Z = z + x \Delta z +$ &c. so bekömmt man folgende Regel.

Auflösung. Die gegebene Reihe sey A, B, C, D, E, &c. so wird der allgemeine Satz Z aus dieser Formel gefunden

$$\begin{aligned} Z = & A \\ & + x(B - A) \\ & + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}(C - 2B + A) \\ & + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}(D - 3C + 3B - A) \\ & + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(E - 4D + 6C - 4B + A \\ & \quad \text{\&c.} \quad \text{\&c.} \end{aligned}$$

Die Faktoren vor A, B, C, D, u. s. f. in dieser Formel, folgen nach der Regel für die Erhebung eines Binomiums. Wenn nun zulezt eine dieser Differenzen (B—A), (C—2B+A) u. s. f. null wird, so bricht die Formel ab, und man hat den allgemeinen Satz der gegebenen Reihe gefunden.

Exempel I. Es sey zu finden der allgemeine Satz für die Reihe

1, 4, 9, 16, 25, u. s. f.

welche die natürliche Folge der Quadratzahlen enthält. Hier ist also

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 4 \\ C &= 9 \\ D &= 16 \\ E &= 25 \\ &\text{\&c.} \quad \text{\&c.} \end{aligned}$$

Es wird folglich

$$\begin{aligned} B - A &= 3 \\ C - 2B + A &= 2 \\ D - 3C + 3B - A &= 0 \end{aligned}$$

und alle folgende Differenzen werden auch $=0$. Setzet man nun die gefundenen Werthe in der Formel, so wird

$$
\begin{aligned}
Z &= 1 + 3x + 2\frac{x(x-1)}{1.\ 2} \\
&= 1 + 3x + x^2 - x \\
&= 1 + 2x + x^2 \\
&= (1 + x)^2
\end{aligned}
$$

Es ist also $(1+x)^2$ der allgemeine Satz für die Reihe der Quadratzahlen. Und in der That, wenn man anstatt x nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, u. s. f. setzet, so bekömmt man 1, 4, 9, 16, 25, u. s. f.

Exempel II. Es wird der allgemeine Satz verlanget für die Reihe

1, 8, 27, 64, 125, &c.

welche die natürliche Folge der Kubikzahlen enthält. Hier ist

$$
\begin{aligned}
A &= 1 \\
B &= 8 \\
C &= 27 \\
D &= 64 \\
E &= 125 \\
\&c. &\ \&c.
\end{aligned}
$$

Hieraus wird

$$
\begin{aligned}
&B - A = 7 \\
&C - 2B + A = 12 \\
&D - 3C + 3B - A = 6 \\
&E - 4D + 6C - 4B + A = 0
\end{aligned}
$$

und alle folgende Differenzen sind $=0$. Also bekömmt man

$$
\begin{aligned}
Z &= 1 + 7x + 12\frac{x(x-1)}{1.\ 2} + 6\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} \\
&= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\
&= (1+x)^3
\end{aligned}
$$

Also

Also ist $(1+x)^3$ der allgemeine Satz für die Reihe der Kubikzahlen.

§. 13.

Das Aggregat so vieler Sätze als man will, in einer gegebenen Reihe finden.

Vorbereitung. Wir haben im vorigen Paragraph gesehen, daß, wenn die Sätze nach und nach werden z, z^{I}, z^{II}, z^{III}, z^{IV} &c., dieselben folgendermaßen aus ihren Differenzen entstehen

$$\begin{aligned} z &= z \\ z^{I} &= z + \Delta z \\ z^{II} &= z + 2\Delta z + \Delta^2 z \\ z^{III} &= z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z \\ z^{IV} &= z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 + \Delta^4 z \\ &\quad \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Wenn man nun nach und nach die beiden ersten, die drei ersten, die vier ersten Sätze, u. s. f. addiret, so bekömmt man

$$\begin{aligned} z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= z \\ z+z' \ldots\ldots\ldots\ldots &= 2z + \Delta z \\ z+z'+z'' \ldots\ldots\ldots &= 3z + 3\Delta z + \Delta^2 z \\ z+z'+z''+z''' \ldots &= 4z + 6\Delta z + 4\Delta^2 z + \Delta^3 z \\ z+z'+z''+z'''+z^{IV} &= 5z + 10\Delta z + 10\Delta^2 z + 5\Delta^3 z + \Delta^4 z \end{aligned}$$

Hieraus siehet man überhaupt, daß das Aggregat so vieler Sätze, als man will, vom ersten gezählet, durch folgende Formel gefunden werden kann:

$$z+z'+z''z'''+\&c. \ldots + z^{N-1} = Nz + \frac{N(N-1)}{1.\ 2}\Delta z + \frac{N(N-1)}{1.\ 2.}\frac{(N-2)}{3}\Delta^2 z + \frac{N(N-1)(N-2)}{1.\ 2.\ 3.}\frac{(N-3)}{4}\Delta^3 z + \&c.$$

Es ist aber, wenn man A, B, C, D, E, u. s. f. anstatt z, z', z'', z''', z^{IV} &c. schreibet

$$\Delta z = B - A$$
$$\Delta^2 z = C - 2B + A$$
$$\Delta^3 z = D - 3C + 3B - A$$
$$\Delta^4 z = E - 4D + 6C - 4B + A$$
&c. *&c.*

wie vor kurzem bewiesen worden. Setzet man nun diese Werthe in der Formel, so entstehet folgende Regel.

Auflösung. Es werde gesuchet das Aggregat von N Sätzen einer Reihe A, B, C, D, E, u. s. f., vom ersten an gezählet, so wird dieses Aggregat durch folgende Reihe ausgedrücket:

$$N.\,A$$
$$+ \frac{N(N-1)}{1.\,2}(B-A)$$
$$+ \frac{N(N-1)(N-2)}{1.\,2.\,3}(C-2B+A)$$
$$+ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{1.\,2.\,3.\,4}(D-3C+3B-A)$$
$$+ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}(E-4D+6C-4B+A)$$
&c.

Der Buchstabe N drücket hier die Anzahl der Sätze aus. Denn die Formel ist, vermöge der Vorbereitung, das Aggregat von

$$z + z' + z'' + z''' + z^{iv} + \&c. \ldots + z^{N-1}$$

Es ist aber der lezte Satz z^{N-1} in der That der Nte Satz, nicht der $(N-1)$te, weil der erste Satz z kein algorithmisches Zeichen bei sich hat.

Exempel I. Es sey verlanget das Aggregat der N ersten Quadratzahlen, so ist hier

$$A = 1$$
$$B - A = 3$$
$$C - 2B + A = 2$$

und

und die folgenden Differenzen sind null. Setzet man diese Werthe in die Formel, so entstehet

$$N + 3\,\frac{N(N-1)}{1.\;2} + 2\,\frac{N(N-1)(N-2)}{1.\;2.\;3}$$

oder $$\frac{N + 3N^2 + 2N^3}{6}$$

Es sey $N = 10$, so ist die Summe der 10 ersten Quadratzahlen

$$\frac{10 + 300 + 2000}{6} = 385$$

Exempel II. Es sey verlanget das Aggregat der N ersten Kubikzahlen, so ist hier

$$A = 1$$
$$B - A = 7$$
$$C - 2B + A = 12$$
$$D - 3C + B - A = 6$$

und die folgenden Differenzen sind null. Setzet man diese Werthe in die Formel, so bekömt man, wenn man das Aggregat durch S andeutet

$$S = N + 7\,\frac{N(N-1)}{1.\;2} + 12\,\frac{N(N-1)(N-2)}{1\;2.\;3} + 6\,\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{1.\;2.\;3.\;4}$$

$$24S = 24N + 84N(N-1) + 48N(N-1)(N-2) + 6N(N-1)(N-2)(N-3)$$

oder, wenn man die Produkte entwickelt und addiret

$$24S = 6N^2 + 12N^3 + 6N^4$$
$$4S = N^2 + 2N^3 + N^4$$
$$S = N^2 + 2N^3 + N^4$$
$$S = \frac{N^2 + 2N^3 + N^4}{4}$$

Es sey $N = 10$, so wird das Aggregat der 10 ersten Kubikzahlen

$$\frac{100 + 2000 + 10000}{4} = 3025.$$

Exempel III. Es werde verlanget, das Aggregat von N Sätzen einer arithmetischen Progreßion, worin der erste Satz a und der Unterschied der Sätze allemal d ist, so findet keine zweite Differenz Statt. Es ist also in diesem Falle

$$A = a$$
$$B - A = d$$

und die höheren Differenzen sind null.

Setzet man diese Werthe in der Formel, und nennet das Aggregat S, so wird

$$S = Na + \frac{N(N-1)}{1.\ 2} d$$
$$2\ S = 2Na + NNd - Nd$$
$$2\ S = (2a + Nd - d)\ N$$
$$S = \frac{(2a + Nd - d)N}{2}$$

Diese lezte Formel ist die nemliche, welche man im VIIIten Hauptstücke, im Zusatz des §. 30 findet, und welche dort auf einer anderen Art herausgebracht worden.

Anmerkung. Dies hier vorgeschriebene Verfahren kann nur in dem Falle gebrauchet werden, wo man auf Differenzen kömt, die da null werden.

§. 14.

In einer Reihe ist jeder Satz die Differenz vom Aggregate aller vorhergehenden Sätze.

Dieses wird ein jeder zugeben, so bald er es nur verstehet. Es sey eine Reihe

$$z,\ z',\ z'',\ z''',\ z^{iv},\ \&c.$$

so wird das Aggregat nach und nach

$$S = z$$
$$S' = z + z'$$
$$S'' = z + z' + z''$$
$$S''' = z + z' + z'' + z'''$$
$$S^{iv} = z + z' + z'' + z''' + z^{iv}$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Hier

Hier ist die Differenz

$$S' - S = z'$$
$$S'' - S' = z''$$
$$S''' - S'' = z'''$$
$$S^{IV} - S''' = z^{IV}$$
&c. &c.

Es ist also zum Exempel z''' die Differenz des Aggregates $z + z' + z''$, desgleichen ist z^{IV} die Differenz des Aggregates $z + z' + z'' + z'''$, u. s. f.

§. 15.

Aufgabe.

Aus dem allgemeinen Satze einer Reihe das Aggregat so vieler Sätze, als man will, vom ersten an gezählet, finden.

Auflösung. Der allgemeine Satz (§. 12) drücket den Nten oder $x$ten Satz einer Reihe aus, wenn man den ersten nicht mitzählet, oder den $(x+1)$ten, wenn man den ersten mitzählet. Dieser $(x+1)$te Satz ist, vermöge des vorigen Paragraphs, die Differenz des Aggregats aller vorhergehenden Sätze, oder der x ersten Sätze in der Reihe. Wenn also Z der allgemeine Satz ist, und S ist das Aggregat der x ersten Sätze, so hat man

$$Z = \Delta S$$
folglich $$\Sigma Z = S$$

Also um S oder das verlangte Aggregat zu bekommen, muß man zu Z die Summe suchen, das ist die Funkzion, deren Differenz $= Z$ ist, indem $\Delta x = 1$ angenommen wird, wie oben (§. 8) gelehret worden.

Exempel I. Der allgemeine Satz für die Quadratzahlen ist

$$Z = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

Folglich ist

$$\Delta S = 1 + 2x + x^2$$

Suchet man die Summe für jeden Satz nach §. 8, so ist

$$\Sigma 1 = x$$
$$2 \Sigma x = x^2 - x$$
$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

Folglich ist

$$S = x + x^2 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$
$$6S = 6x + 6x^2 - 6x + 2x^3 - 3x^2 + x$$
$$6S = 2x^3 + 3x^2 + x$$
$$S = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6}$$

Es ist also diese lezte Formel der Ausdruck für das Aggregat der x ersten Quadratzahlen. Schreibet man N anstatt x, so kömt

$$S = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$$

wie schon §. 13 gefunden worden.

Exempel II. Der allgemeine Satz für die Reihe der Kubikzahlen ist

$$Z = (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Wenn man hierzu, wie vorher, die Summe suchet, so findet man

$$S = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}$$

welche Formel wiederum mit der im §. 13 gefundenen übereinstimmet.

Anmer-

Anmerkung. Es müste eigentlich hier bei den gefundenen Summen eine willkührliche Größe C zugesetzet werden. (§. 9). Z. E. für die Quadratzahlen wäre

$$\Sigma(1 + 2x + x^2) = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} + C$$

$$\text{oder} \quad S = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} + C$$

Man weiß aber, daß $S = 0$ werden muß, wenn $x = 0$, das ist, das Aggregat der Reihe wird null, wenn die Anzahl der Sätze null ist. Setzet man also 0 anstatt S und 0 anstatt x, so wird (§. 10)

$$0 = 0 + C$$

$$\text{und} \quad 0 = C$$

Es ist also keine beständige Größe anzusetzen, und das gefundene Aggregat hat schon für sich selbst seine Richtigkeit.

§. 16.

Da wir uns jezt mit den Reihen beschäftigen, so wollen wir hier noch einige sehr bekannte Zahlreihen betrachten, und die vorigen Regeln darauf anwenden. Laßt uns erstlich die Polygonalzahlen vornehmen.

Eine Polygonalzahl oder vieleckigte Zahl entstehet, wenn das Aggregat einiger Sätze einer arithmetischen Progreßion genommen wird, nemlich vom ersten Satze an gezählet.

Man nehme einige arithmetische Progreßionen, wo in der ersten der Unterschied 1 sey, in der zweiten 2, in der dritten 3, u. s. f. Bei jeder Progreßion nehme man die Aggregate der beiden ersten, der drei ersten, der vier ersten Sätze, u. s. f., so entstehen die Polygonalzahlen folgendermaßen:

Pro=

Progreßionen.	Polygonalzahlen.	
1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.	1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.	dreieckigte Zahlen.
1, 3, 5, 7, 9, 11, &c.	1, 4, 9, 16, 25, 36, &c.	viereckigte Zahlen.
1, 4, 7, 10, 13, 16, &c.	1, 5, 12, 22, 35, 51, &c.	fünfeckigte Zahlen.
1, 5, 9, 13, 17, 21, &c.	1, 6, 15, 28, 45, 66, &c.	sechseckigte Zahlen.
1, 6, 11, 16, 21, 26, &c.	1, 7, 18, 34, 55, 81, &c.	siebeneckigte Zahlen.
&c.	&c.	

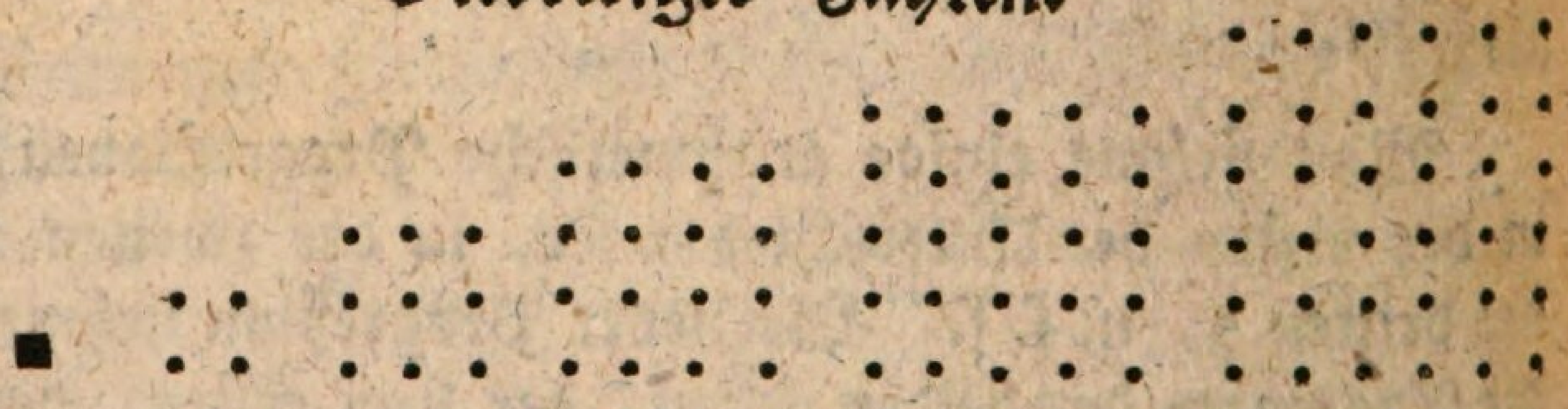
Den Namen Polygonalzahlen, oder vieleckigte Zahlen, haben diese Zahlen daher bekommen, weil ihre Einheiten, wenn sie mit Punkten ausgedrücket werden, sich in Gestalt eines regelmäßigen Vielecks anordnen lassen. Die Zahl, welche die Stelle eines Vielecks in der natürlichen Ordnung aller gleichvieleckigten Zahlen anzeiget, heißt die Basis oder Seite des Vielecks. Z. E. 3 ist die Basis des Dreiecks 6, des Vierecks 9, des Fünfecks 12, des Sechsecks 15, des Siebenecks 18, u. s. f., weil jede dieser Zahlen die dritte in ihrer Art ist.

Folgende Figuren werden die Entstehung der vieleckigten Zahlen deutlicher vor Augen legen:

Dreieckigte Zahlen.

Basis	1	2	3	4	5	6
Dreieck	1	3	6	10	15	21

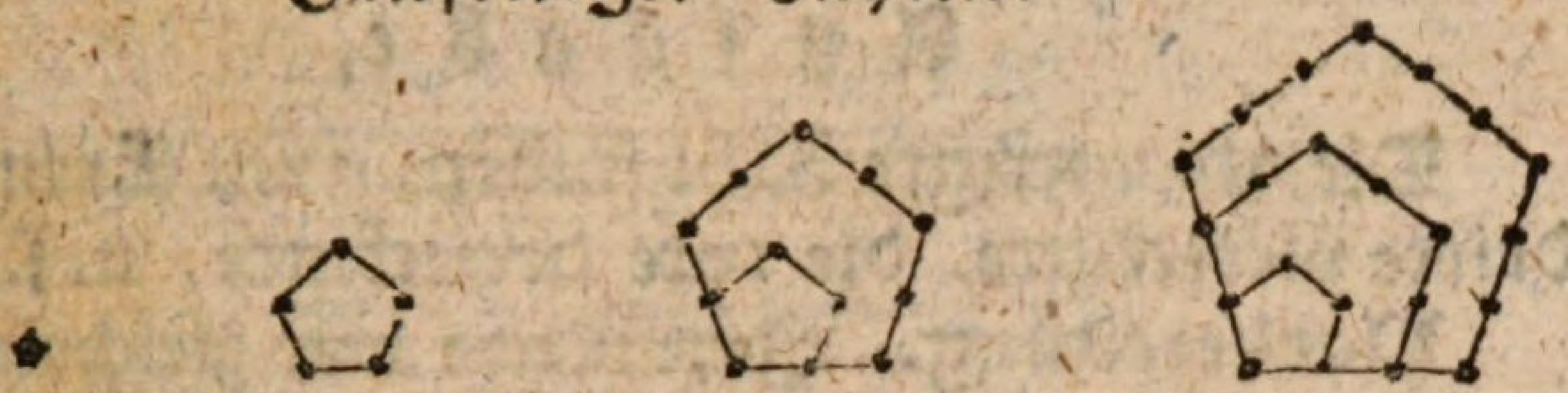
Viereckigte Zahlen.



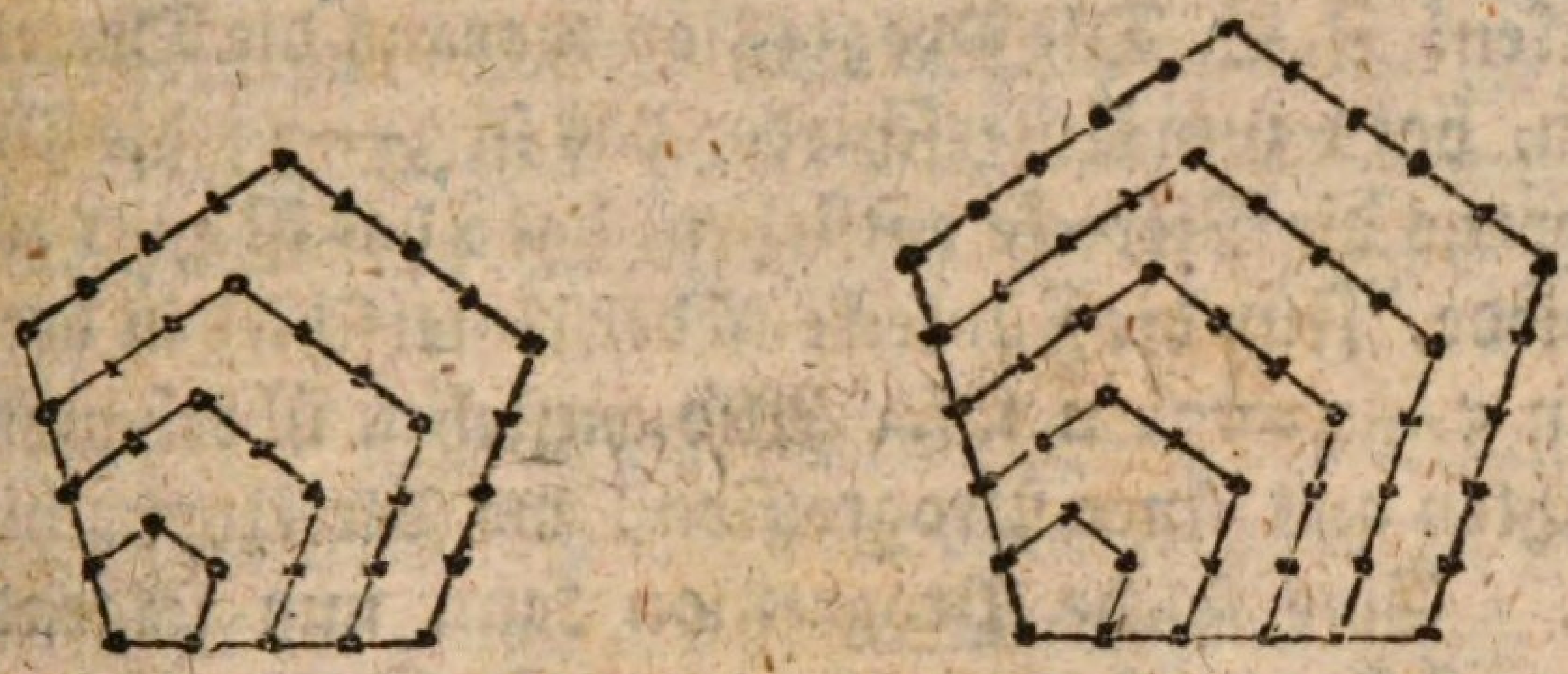
Basis	1	2	3	4	5	6
Viereck	1	4	9	16	25	36

Fünf=

Fünfeckigte Zahlen.

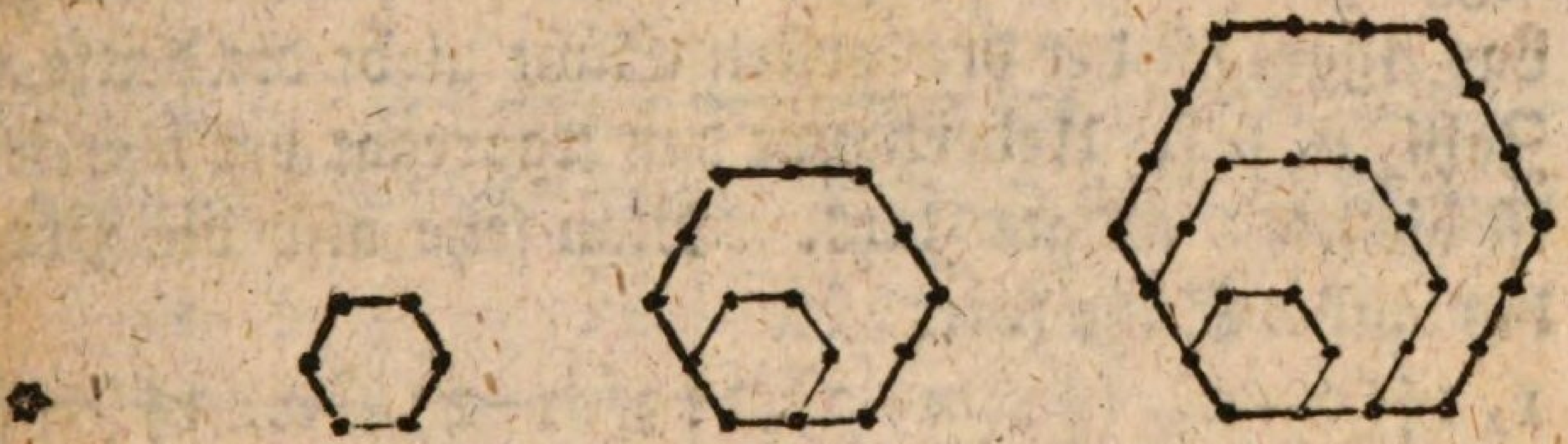


Basis	1	2	3	4
Fünfeck	1	5	12	22

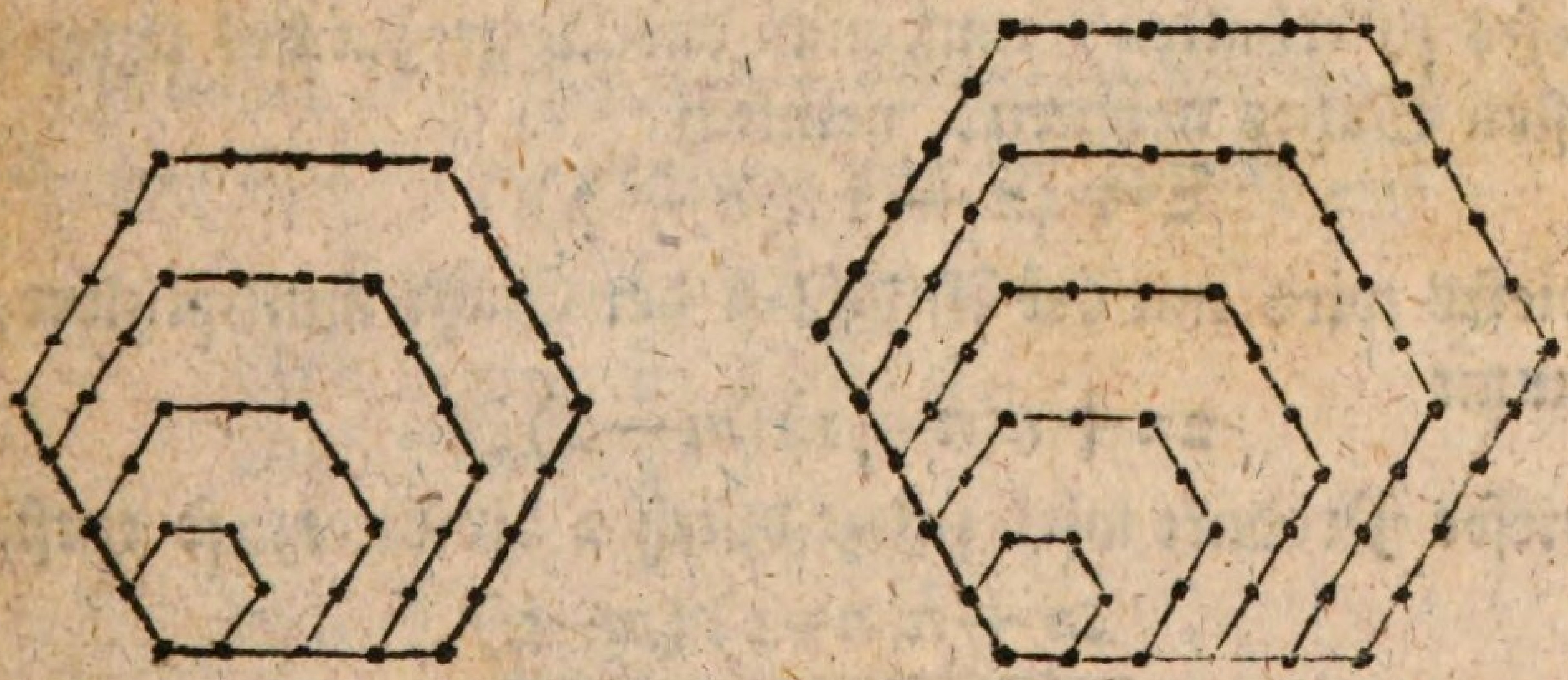


5	6
35	51

Sechseckigte Zahlen.



Basis	1	2	3	4
Sechseck	1	6	15	28



5	6
45	66

§. 17.

§. 17.

Aufgabe.

Die *n*te *m*eckigte Zahl finden, zum Exempel die dritte viereckigte, die 10te dreieckigte, u. s. f.

Vorbereitung. Jede Reihe von gleichvieleckigten Zahlen entstehet aus einer arithmetischen Progression, worinn der Unterschied um 2 kleiner ist, als die Anzahl der Ecken. Z. E. Die Progression woraus die Dreiecke entstehen, hat 1 zum Unterschiede, das ist $3-2$; die Progression woraus die Vierecke entstehen, hat 2 das ist $4-2$ zum Unterschiede. Für die Fünfecke ist der Unterschied in der Progression $5-2=3$, u. s. f. Also entstehen überhaupt *m*eckigte Zahlen aus einer Progression, wo der Unterschied $m-2$ ist. Eine solche Progression kann nun folgendermaßen vorgestellet werden, wenn der erste Saz 1 ist.

$1, 1+(m-2), 1+2(m-2), 1+3(m-2), 1+4(m-2)$, &c.

Der erste Saz 1 machet die erste *m*eckigte Zahl aus, das Aggregat der beiden ersten machet die zweite *m*eckigte Zahl, das Aggregat der drei ersten Säze giebt die dritte *m*eckigte Zahl, u. s. f. Ueberhaupt das Aggregat der *n* ersten Säze ist die *n*te *m*eckigte Zahl. Man seze also die Progression bis auf *n* Säze fort.

$1, 1+(m-2), 1+2(m-2), 1+3(m-2)$, &c... $1+(n-1)(m\ 2)$

Der *n*te Saz wird $1+(n-1)(m-2)$. Nun suche man das Aggregat dieser *n* Säze (VIII. Hauptst. §. 30). Um dieses zu erhalten, muß man das Aggregat des lezten und ersten Sazes nehmen, nemlich

$$2+(n-1)(m-2)$$

Dieses wird mit der Anzahl *n* der Säze multipliziret, so kömmt

$$2n+n(n-1)(m-2)$$

Dieses Produkt wird zulezt durch 2 dividiret, so entstehet

$$\frac{2n+n(n-1)(m-2)}{2}$$

oder $n+\frac{1}{2}n(n-1)(m-2)$

oder,

oder, wenn man die Produkte entwickelt

$$\frac{mnn - 2nn - mn + 4n}{2}$$

oder $$\frac{(m-2)nn - (m-4)n}{2}$$

Alle diese Ausdrücke geben die Summe der n ersten Sätze in einer Progression, wo der erste Satz 1 und der Unterschied $m-2$ ist, folglich zugleich die $n$te Polygonalzahl von m Ecken, oder die $m$eckigte Zahl, deren Basis n ist.

Auflösung. Wenn die $n$te $m$eckigte Zahl verlanget wird, so bediene man sich einer der eben gefundenen Formeln, worunter die zweite am bequemsten ist, nemlich

$$n + \tfrac{1}{2}n(n-1)(m-2)$$

und wo m die Anzahl der Ecken und n die Seite oder Basis bedeutet.

Exempel I. Es werde verlanget die 10te dreieckigte Zahl. Hier ist $n = 10$, $m = 3$. Folglich wird die Formel

$10 + \tfrac{1}{2} \cdot 10(10-1)(3-2)$
oder $10 + 5 \cdot 9 \cdot 1$
oder $10 + 45$
oder 55

Exempel II. Es werde verlanget die 7te 9eckigte Zahl, hier ist $n = 7$, $m = 9$, und die Formel giebt.

$7 + \tfrac{1}{2} \cdot 7(7-1)(9-2)$
oder $7 + \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7$
oder $7 + 3 \cdot 7^2$
oder $7 + 3 \cdot 49$
oder $7 + 147$
oder 154

Zusatz.

Zusatz. Es sey die $n$te $m$eckigte Zahl k genannt, so ist

$$k = \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$$

Hieraus läßt sich m oder n bestimmen, wenn es verlanget wird. Es werde gefraget, welches die Seite der 9eckigten Zahl 154 ist, so ist $k = 154$, $m = 9$, also

$$154 = \frac{(9-2)nn-(9-4)n}{2}$$

$$154 = \frac{7nn-5n}{2}$$

$$2 \cdot 154 = 7nn-5n$$

$$\frac{2 \cdot 154}{7} = nn - \frac{5}{7}n$$

$$44 = nn - \tfrac{5}{7}n$$

$$44 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 = nn - \frac{5}{7}n + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$\frac{8649}{196} = nn - \frac{5}{7}n + \frac{25}{196}$$

$$\sqrt{\frac{8649}{196}} = \sqrt{\left(nn - \frac{5}{7}n + \frac{5^2}{14^2}\right)}$$

$$\pm \frac{93}{14} = n - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{14} \pm \frac{93}{14} = n$$

Es ist also $n = \frac{98}{14} = 7$, oder 154 ist die siebente 9eckigte Zahl. Die negative Wurzel $\frac{5-93}{14} = -\frac{88}{14} = -6\frac{2}{7}$ kann hier keine Bedeutung haben, weil man keine negative Basen für die vieleckigten Zahlen anzunehmen pfleget.

§. 18.

§. 18.

Der Ausdruck

$$n + \tfrac{1}{2}n(n-1)(m-2)$$

oder $x + \tfrac{1}{2}x(x-1)(m-2)$

bedeutet die *n*te oder *x*te *m*eckigte Zahl. Dieser Ausdruck ist also ein allgemeiner Satz für die Folge der *m*eckigten Zahlen. Weil aber der allgemeine Satz, wie oben gezeiget worden, nicht eigentlich den *x*ten, sondern den $(x+1)$ten Satz ausdrücken soll, so setze man in der letzten Formel $x+1$ anstatt x. Daher entstehet, wenn Z die $(x+1)$te *m*eckigte Zahl ist

$$Z = 1 + x + \tfrac{1}{2}x(x+1)(m-2)$$

oder $$Z = \frac{m-2}{2}xx + \frac{m}{2}x + 1$$

§. 19.

Aufgabe.

Das Aggregat einer Reihe von gleichvieleckigten Zahlen finden.

Vorbereitung. Man suche die Summe zum allgemeinen Satze

$$\frac{m}{2}xx - xx + \frac{m}{2}x + 1$$

indem $\Delta x = 1$ gesetzet wird (§. 15). In dieser Hypothese wird

$$\frac{m}{2}\Sigma xx = \frac{m}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{m}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{x}{6} = \frac{m}{6}x^3 - \frac{m}{4}x^2 + \frac{m}{12}x$$

$$-\Sigma xx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$$\frac{m}{2}\Sigma x = \frac{m}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{m}{2}\cdot\frac{x}{2} \;\ldots\ldots = \;\ldots + \frac{m}{4}x^2 - \frac{m}{4}x$$

$$\Sigma 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x$$

Addiret man diese Summen, und nennet das verlangte Aggregat S, so ist

$$S = \left(\frac{m}{6} - \frac{1}{3}\right)x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - \left(\frac{m}{4} - \frac{m}{12} - 1 + \frac{1}{6}\right)x$$

$$12S = (2m - 4)x^3 + 6x^2 - (2m - 10)x$$

$$6S = (m - 2)x^3 + 3x^2 - (m - 5)x$$

$$S = \frac{(m - 2)x^3 + 3x^2 - (m - 5)x}{6}$$

Auflösung. Man bediene sich der letzten Formel, nemlich

$$S = \frac{(m - 2)x^3 + 3x^2 - (m - 5)x}{6}$$

wo x die Anzahl der Sätze, m die Anzahl der Ecken und S deren Aggregat vorstellet.

Exempel I. Es werde verlanget das Aggregat der 6 ersten 7eckigten Zahlen, so ist $x = 6$, $m = 7$, folglich

$$S = \frac{(7-2)6^3 + 3.6^2 - (7-5)6}{6}$$

$$= \frac{5.6^3 + 3.6^2 - 2.6}{6}$$

$$= 5.6^2 + 3.6 - 2$$

$$= 196.$$

Exempel II. Es werde verlanget die Summe der 5 ersten dreieckigten Zahlen, so ist $x = 5$, $m = 3$, folglich

$$S = \frac{(3-2)5^3 + 3.5^2 - (3-5).5}{6}$$

$$= \frac{5^3 + 3.5^2 + 2.5}{6}$$

$$= 35$$

§. 20.

§. 20.

Die figurirten Zahlen, welche einige Schriftsteller mit den vieleckigten Zahlen verwechseln, entstehen folgendermaßen

1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. beständige Zahlen, oder von der 1sten Ordnung.

1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. natürliche Zahlen, oder von der 2ten Ordnung.

1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. dreieckigte Zahlen, oder von der 3ten Ordnung.

1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. pyramidale Zahlen, oder von der 4ten Ordnung, &c. &c.

Hier entstehet jede Zahl aus dem Aggregate der über ihr stehenden, und aller vorhergehenden in der vorigen Reihe. Z. E. Die natürliche Zahl 6 entstehet aus den beständigen Zahlen $1+1+1+1+1+1$. Die dreieckigte Zahl 21 entstehet aus den natürlichen Zahlen $1+2+3+4+5+6$. Die pyramidale Zahl 56 entstehet aus den dreieckigten Zahlen $1+3+6+10+15+21$.

Die dreieckigten Zahlen, welche hier vorkommen, sind zugleich Polygonal-Zahlen, und ihre Entstehung aus Punkten ist schon oben erkläret worden. Die Pyramidal-Zahlen haben ihren Namen von der Pyramide, einem geometrischen Körper. Man nehme die auf einanderfolgenden Dreiecke, so wie sie §. 16 vorgestellet sind, und lege sie über einander, nemlich das größte Dreieck unten und die kleineren darüber, immer in einer gewissen Entfernung, so entstehet eine dreieckigte Pyramide, das ist, ein Körper der eine dreieckigte Grundfläche, und noch drei dreieckigte Flächen hat, welche oben spitz zusammen laufen. Auf solcher Art kann man einen Haufen Kanonenkugeln in Gestalt einer Pyramide über einander legen. Es sey die unterste Lage ein Dreieck von 21 Kugeln, die zweite ein Dreieck von 15, die dritte von 10, die vierte von 6, die fünfte

von 3, die sechste von 1, so entstehet eine Pyramide von $1+3+6+10+15+21 = 56$ Kugeln.

Die figürlichen Zahlen über die vierte Ordnung können nicht durch Punkte oder Kugeln vorgestellet werden, und behalten nur den Namen figürlicher Zahlen, wegen ihrer ähnlichen Entstehung aus den Summen der vorhergehenden Reihen.

§. 21.

Laßt uns nun die allgemeinen Sätze für die Reihen der figurirten Zahlen suchen.

I) Für die beständigen Zahlen oder die gleichen Einheiten ist der $(x+1)$te Satz allemal 1. Also ist

$$Z = 1$$

wenn nemlich Z den $(x+1)$ten Satz bedeutet.

II) Für die natürlichen Zahlen ist der $(x+1)$te Satz $x+1$, also

$$Z = x + 1$$

III) Nimmt man die Summe dieses allgemeinen Satzes, so ist

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\Sigma 1 = x$$

folglich

$$\Sigma(x+1) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + x = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

Also ist $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ oder $\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$ das Aggregat der x ersten natürlichen Zahlen. Folglich ist auch

$$\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

die

die $x$te dreieckigte Zahl. Diese Formel kömmt auch mit derjenigen übereins, welche aus §. 18 fließt. Denn dort ist die $x$te $m$eckigte Zahl

$$x+\tfrac{1}{2}x(x-1)(m-2)$$

Beim Dreieck aber ist $m=3$, folglich $m-2=1$, daher entstehet

$$x+\tfrac{1}{2}x(x-1)$$

$$=x+\tfrac{1}{2}xx-\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x=\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

Setzet man in der gefundenen Formel $x+1$ anstatt x, so entstehet

anstatt $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$

diese Formel $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x+1)}{2}$

oder $\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+1$

und diese Formel drücket die $(x+1)$te dreieckigte Zahl aus.

IV) Man suche die Summe der lezten Formel, so findet man

$$\tfrac{1}{2}\Sigma x^2=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}$$

$$\tfrac{3}{2}\Sigma x=\frac{3x^2}{4}-\frac{3x}{4}$$

$$\Sigma 1=x$$

Ist also S das Aggregat der x ersten dreieckigten Zahlen, so wird

$$S=\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}-\frac{3x}{4}+x$$

$$12S=2x^3+9x^2-3x^2+x-9x+12x$$

$$12S=2x^3+6x^2+4x$$

$$S=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$$

 und

und diese Formel drücket zugleich das Aggregat der x ersten dreieckigten Zahlen, und die $x$te pyramidale Zahl aus.

V) Wenn man nun in der lezten Formel $x+1$ anstatt x sezet, wiederum die Summe suchet, und so weiter fortfähret, findet man

die $x$te beständige Zahl . . 1

die $x$te natürliche Zahl . . x

die $x$te dreieckigte Zahl . . $\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$

die $x$te pyramidale Zahl . . $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$

die $x$te Zahl der 5ten Ordnung $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

die $x$te Zahl der 6ten Ordnung $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

und so ferner.

Also wird überhaupt seyn die $x$te Zahl der $n$ten Ordnung

$$\frac{x(x+1)(x+2)\ .\ .\ .\ .\ .\ x(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ \qquad n-1}$$

Anmerkung. Dieser Ausdruck ist zugleich die Formel für die Anzahl der mittleren Verwechslungen von der $(n-1)$ten Ordnung, für x verschiedene Größen. (V. Hauptstück §. 23).

Wenn man die Potenzen einer binomischen Größe folgendermaaßen unter einander schreibet

$$\begin{array}{llllll}
1a & +1b & & & & \\
1a^2 & +2ab & +1b^2 & & & \\
1a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +1b^3 & & \\
1a^4 & +4a^3b & +6a^2b^2 & +4ab^3 & +1b^4 & \\
1a^5 & +5a^4b & +10a^3b^2 & +10a^2b^3 & 5ab^4 & +1b^5
\end{array}$$

so

so sind die Koeffizienten in der ersten Kolumne die beständigen Zahlen; in der zweiten, die natürlichen; in der dritten, die dreieckigte Zahlen; in der vierten die pyramidale Zahlen, u. s. f.

§. 22.

Aufgabe.

Das Aggregat einiger der ersten Sätze in einer Reihe figurirter Zahlen von gleicher Ordnung finden.

Auflösung. Gesetzet, man soll das Aggregat der x ersten figurirten Zahlen von der $m$ten Ordnung finden; so ist aus dem Vorhergehenden deutlich genug, daß das verlangte Aggregat nichts anders sey, als die $x$te figurirte Zahl von der folgenden Ordnung, nemlich von der $(m+1)$ten Ordnung. Folglich machen

die x ersten beständigen Zahlen x

die x ersten natürlichen Zahlen $\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$

die x ersten dreieckigten Zahlen $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$

die x ersten Pyramidalzahlen $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

die x ersten Z. von der 5ten Ordn. $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

Also überhaupt

die x erst. Z. von der $m$ten Ordn. $\frac{x(x+1)(x+2)\ldots.(x+m-1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ m}$

Exempel I. Es wird verlanget das Aggregat der 100 ersten natürlichen Zahlen, nemlich

$1+2+3+4+5+$ &c. . . . . . . $+100$

Hier ist in der Formel

$$\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

$x = 100$. Also wird das Aggregat

$$\frac{100.(100+1)}{1.\ 2}$$

oder $50 . 101$

oder 5050

Exempel II. Man verlanget das Aggregat der 100 ersten dreieckigten Zahlen, so ist $x = 100$ in der Formel

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$$

und das verlangete Aggregat wird

$$\frac{100.(100+1).(100+2)}{1.\ 2.\ 3}$$

und wenn man alles gehörig entwickelt

$$171700$$

Exempel III. Man will wissen das Aggregat der 100 ersten Pyramidalzahlen, so ist $x = 100$ in der Formel

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

und man bekömmt

$$\frac{100 . 101 . 102 . 103}{1.\ 2.\ 3\ 4} = 4421275$$

§. 23.

Zu den gewöhnlichsten Reihen gehören die Folgen der Quadratzahlen, Kubikzahlen, u. s. f. wovon die Aggregate schon oben §. 13 und 15 gefunden worden.

Ferner

Ferner die Reihe der Potenzen als $a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 +$ &c. welche nichts anders ist, als eine geometrische Progression, und nach den gewöhnlichen Regeln solcher Proporzionen behandelt werden kann.

Ferner die sogenannte **harmonische oder musikalische Progression**, wo die nemliche Zahl durch die Säze einer arithmetischen Progression dividiret ist, als

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{7}{3}, \frac{7}{5}, \frac{7}{7}, \frac{7}{9}, \frac{7}{11}, \frac{7}{13}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{2}{5}, \frac{2}{8}, \frac{2}{11}, \frac{2}{14}, \frac{2}{17}, \text{ \&c.}$$

Diese Arten Reihen werden deswegen harmonisch genannt, weil nach denselben und hauptsächlich nach der ersten, die Länge einer klingenden Sayte eingetheilet wird, um die verschiedenen Töne in der Musik hervorzubringen. Weil die Alten viel auf Arithmetik, Geometrie und Musik hielten, so haben sie vermuthlich deswegen auch dreierlei Proporzionen und Progressionen haben wollen, nemlich arithmetische, geometrische und musikalische. Uebrigens hat man noch keine Formel gefunden, wornach man das Aggregat der Säze in einer harmonischen Progression machen könnte.

Die Reihe die am häufigsten vorkömmt, ist die geometrische Progression. Sie ist schon hinlänglich an ihrem Orte abgehandelt worden. Hier wollen wir nur noch anmerken, daß das Aggregat derselben auch dann gefunden werden kann, wenn die Säze ohne Ende abnehmen. Z. E. Bei dieser geometrischen Progression

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \text{ \&c.} + \text{ \&c.}$$

ist der erste Saz $\frac{1}{3}$, die Razion ist auch $\frac{1}{3}$. Weil die Säze ohne Ende abnehmen, so kann man den lezten für 0 halten. Kehret man die Progression um, so ist der erste Saz 0, der lezte $\frac{1}{3}$, die Razion 3. Folglich wird das Aggregat aller Säze (IX. Hauptst. §. 29).

$$\frac{\frac{1}{3} - 0}{3 - 1} + \frac{1}{3}$$

das ist $\frac{1}{3} : 2 + \frac{1}{3}$

oder $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

oder $\frac{1}{2}$.

Folglich, wenn die Progression

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \text{\&c.}$$

ohne Ende fortgehet, so nähert sich der lezte Saz je mehr und mehr dem Nichts, und das Aggregat nähert sich ohne Ende zu $\frac{1}{2}$.

Sechszehntes Hauptstück.

Von den unendlich kleinen Differenzen der Funkzionen, oder von der Differenzial-Rechnung.

§. 1.

Wir schreiten nun zu einem Theile der Rechenkunst, welcher zwar im gemeinen Leben keinen sonderlichen Nutzen hat, der aber in den mathematischen Wissenschaften desto wichtiger und unentbehrlicher ist. Wer die Theorie der unendlichen Größen nicht verstehet, kann es nicht wagen, in die Geheimniße der höheren Geometrie und Mechanik einzudringen, und ist nicht einmal im Stande, die Schriften der großen Mathematiker zu verstehen; sondern er muß Zeitlebens bei den Anfangsgründen stehen bleiben. Wer also Willens ist, sich mit Ernst auf die Mathematik zu legen, der widme diesem und den folgenden Hauptstücken eine ganz besondere Aufmerksamkeit. Die Lehren, welche darin enthalten sind, haben im Grunde nicht mehr Schwierigkeit als viele von den vorhergehenden. Der Name des Unendlichen ist zwar für viele Anfänger abschreckend, aber wenn man nur die Sache mit Muth angreifet, so wird man bald sehen, daß auch hier alles hell und faßlich ist. Zu mehrerer Bequemlichkeit der Lernenden, werde ich die Lehren, welche ich noch vorzutragen habe, ganz von der Geometrie absondern, auf daß sie auch von denen verstanden werden können, die noch von der Mathematik sonst nichts wissen, als was in diesem Buche vorgetragen worden.

§. 2.

Wenn die Differenzen der veränderlichen Größen sehr wenig betragen, so kann man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, in der Differenz der Funkzion diejenigen Säße auslassen, worin Produkte oder Potenzen der Differenzen enthalten sind. Z. E. Man hat gefunden, wenn $z = xy$, daß $\Delta z = x\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$. Sind nun Δx und Δy sehr klein in Vergleichung mit x und y, so hat man

$$\text{beinahe } \Delta z = y\Delta x + x\Delta y.$$

Dieses läßt sich am besten begreifen, wenn man anstatt Δx und Δy kleine Brüche nimt. Es sey $x = 12$, $y = 15$,

$$\Delta x = \frac{1}{1000000},\ \Delta y = \frac{1}{100000},\ \text{so wird}$$

$$\Delta z = \frac{15}{1000000} + \frac{12}{100000} + \frac{1}{100000000000}$$

$$= 0;000015 + 0;00012 + 0;00000000001$$

$$= 0;00013500001$$

Man kann aber den lezten kleinen Bruch weglassen, und so bekömt man

$$\text{beinahe } \Delta z = 0,000135.$$

Es sey $z = x^m$, so ist

$$\Delta z = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} x^{m-2}(\Delta x)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{m-3}(\Delta x)^3 + \&c.$$

Ist hier Δx sehr klein, z. E. $\frac{1}{1000000000}$, so können füglich die Säße ausgelassen werden, wo $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$, u. s. f. stehet, weil die Potenzen von $\frac{1}{1000000000}$ erstaunend klein werden, und allemal wenig betragen, wenn sie auch durch andere Größen als $\frac{m(m-1)}{1.\ 2} x^{m-2}$, u. s. f.

mul=

multipliziret sind. Es ist also in diesem Falle beinahe Δz oder $\Delta(x^m) = mx^{m-1}\Delta x$.

Anmerkung. Je kleiner die Differenzen der gegebenen Größen sind, desto weniger irret man, wenn man die Produkte und Potenzen der Differenzen wegläßt.

§. 3.

Wenn die Differenzen sehr klein sind, so daß man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, ihre Produkte und Potenzen aus der Acht lassen kann, so pfleget man sie mit d anstatt Δ zu bezeichnen; als dx, dy anstatt Δx, Δy. Man muß aber in solchen Fällen den Buchstaben d bei der Bezeichnung der Größen vermeiden. Wir wollen hier den Anfängern zum Besten das deutsche ∂ anstatt des lateinischen d gebrauchen. Dieses ∂ wird also eben so wenig als Δ eine Größe bedeuten, sondern es ist nur ein Zeichen, ohngefähr wie $\sqrt{}$, wie $+$ und $-$, u. s. f.

Die Differenz einer Funkzion, wo die Produkte und Potenzen der Differenzen weggelassen sind, heißt die unvollständige Differenz. Die vollständige Differenz ist diejenige, wo nichts ausgelassen wird.

Die unvollständige Differenz einer Funkzion wird auch das Differenzial derselben genannt; und eine Funkzion differenziren, heißt meistentheils so viel, als ihre unvollständige Differenz suchen. Jedoch wird auch manchmal dieses Wort bei vollständigen Differenzen gebrauchet.

§. 4.

Wenn die Differenzen der veränderlichen Größen sehr klein sind, so ist die Differenz der ganzen Funkzion auch nur klein; sie kann also ebenfalls durch das Zeichen der kleinen Differenzen, nemlich ∂ angedeutet werden. Z. E. Weil $\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$, so ist $\partial(xy) = y\partial x + x\partial y$.

§. 5.

Wenn in einer Differenzialgleichung die sehr kleinen Sätze ausgelassen werden, so ist die Gleichung zwar nicht

nicht mehr vollkommen wahr, aber doch beinahe, und sie kömt der Wahrheit desto näher, je kleiner die Differenzen sind. Es sey

$$ax + y^n = by + xy$$

so ist beinahe $a\Delta x + ny^{n-1}\Delta y = b\Delta y + y\Delta x + x\Delta y$

oder $a\partial x + ny^{n-1}\partial y = b\partial y + y\partial x + x\partial y$.

Eine solche Gleichung mag eine **unvollständige Differenzialgleichung** heißeu.

§. 6.

Wenn zwei Größen beinahe gleich sind, so ist ihr gleichvieltes Multiplum, ihr gleichvielter Theil, ihre gleichvielte Potenz oder Wurzel, und ihr Logarithmus für die nemliche Basis beinahe gleich.

Ferner, wenn zwei Größen beinahe gleich sind, und es werden Größen dazu addiret oder davon subtrahiret, die auch beinahe gleich sind, oder sie werden mit beinahe gleichen Größen multipliziret, oder durch beinahe gleiche Größen dividiret, u. s. f., so sind die Resultate auch beinahe gleich.

Es gilt also von den unvollständigen oder **nähernden** Gleichungen alles, was von den vollständigen und vollkommenen Gleichungen gilt; und beiderlei Arten können auf der nemlichen Art behandelt werden.

§. 7.

Die vollständige oder unvollständige Differenz einer Funkzion kann allemal durch eine Differenzialgleichung ausgedrücket werden.

Man darf nur gleich anfänglich eine veränderliche Größe annehmen, die der gegebenen Funkzion gleich sey und hernach beiderseits die vollständige oder unvollständige Differenz suchen, so muß die Differenz der angenommenen Größe allemal der Differenz der Funkzion selbst gleich seyn. Z. E. Wenn man xy differenziren will, so kann man setzen $z = xy$, woraus dann folget $\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$.

$+\Delta x\Delta y$, und wenn die Differenzen sehr klein sind, beinahe $dz = xdy + ydx$, oder, beinahe $d(xy) = xdy + ydx$.

Diese angenommene Gleichung, und die daraus folgen, können übrigens nach allen gewöhnlichen Regeln behandelt werden, wenn auch die Differenzen unvollständig sind (§. 6.)

§. 8.

Aufgabe.

Eine einzelne Größe differenziren.

Auflösung. Man schreibe an deren Stelle die nemliche Größe mit dem Differenzialzeichen voran. Ist die Größe beständig, so ist ihre Differenz o oder nichts. (XIV. Hauptst. §. 4. Zusatz 3.)

Exempel. Das Differenzial von x ist dx, das Differenzial von y ist dy. Das Differenzial von a ist o.

§. 9.

Aufgabe.

Eine komplexe Größe differenziren.

Auflösung. Man differenzire jeden Satz insbesondere, und behalte die nemlichen Plus- und Minuszeichen. (XIV. Hauptst. §. 4. Zusatz 2.)

Exempel. $d(x+y-z) = dx + dy - dz$

$d(a+y-x-b) = dy - dx$.

§. 10.

Aufgabe.

Ein Produkt differenziren.

Auflösung. Man multiplizire die Differenz jeder veränderlichen Größe mit den übrigen Faktoren, und addire die daraus entstandenen Säze. Sind aber im Produkte auch beständige Größen, so differenzire man erstlich nur die veränderlichen und multiplizire hernach alles mit den beständigen.

Exem-

Exempel.

$$d(xy) = ydx + xdy$$

$$d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$$

$$d(axy) = a(ydx + xdy) = aydx + axdy$$

$$d(abxyz) = ab.d(xyz) = abyzdx + abxzdy + abxydz.$$

Beweis. Es ist $d(xy) = ydx + xdy$ (§. 7.) Ferner ist $xyz = x.yz$ und $d(x.yz) = yzdx + xd(yz)$. Es ist aber $d(yz) = zdy + ydz$. Also ist $yzdx + xd(yz)$ oder $d(xyz) = yzdx + x(zdy + ydz) = yzdx + xzdy + xydz$.

Es ist $axy = a.xy$. Also $d(a.xy) = xyda + ad(xy)$. Und weil $da = o$ (§. 8), so ist $d(a.xy) = ad(xy) = aydx + axdy$. Das übrige wird eben so bewiesen.

§. 11.

Aufgabe.

Einen Bruch differenziren.

Auflösung. Man multiplizire die Differenz des Zählers mit dem Nenner; subtrahire davon das Produkt aus der Differenz des Nenners und dem Zähler; und dividire zulezt alles durch das Quadrat des Nenners.

Wenn der Nenner beständig ist, so darf man nur die Differenz des Zählers durch den Nenner dividiren.

Wenn der Zähler beständig ist, so nimt man das negative Produkt aus der Differenz des Nenners und dem Zähler. Dieses Produkt wird durch das Quadrat des Nenners dividiret.

Exempel.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{yy} \text{ oder } \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$$

$$d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{a}$$

$$d\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{-ady}{yy}$$

Beweis.

Beweis.

Es sey $z = \frac{x}{y}$

so ist $yz = x$

$zdy + ydz = dx$

oder, weil $z = \frac{x}{y}$

$\frac{xdy}{y} + ydz = dx$

$xdy + yydz = ydx$

$yydz = ydx - xdy$

$$dz = \frac{ydx - xdy}{yy} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

Folglich ist auch $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - xda}{aa}$

oder weil $da = 0$, so ist $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx}{aa} = \frac{dx}{a}$

Eben so ist $d\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{yda - ady}{yy}$

und weil $da = 0$, so ist $d\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{-ady}{yy}$

Anmerkung. In den Gleichungen, welche bei diesem Beweise vorkommen, ist zwar die Gleichheit nur nähernd, sie können aber doch, wie andere Gleichungen behandelt werden (§. 6). Was heraus kömmt, ist auch eigentlich nur eine Näherung. Z. E. der Ausdruck $d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ bedeutet nur, daß beide Glieder beinahe gleich werden, wenn dx und dy sehr klein sind.

§. 12.

Aufgabe.

Eine Potenz mit einen beständigen Exponenten differenziren.

Auflösung. Man vermindere um 1 den Exponenten, man multiplizire die verminderte Potenz mit dem gegebenen Exponenten, und zulezt mit der Differenz der Wurzel.

Exempel.

$$\partial(x^m) = mx^{m-1}\,\partial x$$

$$\partial(x^{-m}) = -mx^{-m-1}\,\partial x = -mx^{-(m+1)}\,\partial x$$

$$\partial\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\,\partial x = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}\,\partial x$$

$$\partial\left(x^{-\frac{m}{n}}\right) = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}\,\partial x = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m+n}{n}}\,\partial x$$

Beweis. Daß $\partial(x^m) = nx^{m-1}\partial x$ erhellet aus §. 2.

Es sey $z = x^{-m}$

oder $z = \frac{1}{x^m}$

folglich $\partial z = \partial\left(\frac{1}{x^m}\right)$

$$= \frac{-\partial(x^m)}{x^m\,x^m}$$

$$= \frac{-mx^{m-1}\,\partial x}{x^{2m}}$$

$$= -mx^{-m-1}\,\partial x$$

Es

Es sey $z = x^{\frac{m}{n}}$

so ist $z^n = x^m$

folglich $n z^{n-1} \partial z = m x^{m-1} \partial x$

$$n\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1} \partial z = m x^{m-1} \partial x$$

$$n x^{m-\frac{m}{n}} \partial z = m x^{m-1} \partial x$$

$$\partial z = \frac{m x^{m-1} \partial x}{n x^{m-\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \partial x$$

Es sey $z = x^{-\frac{m}{n}}$

oder $z = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$

so ist $\partial z = \partial\left(\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\right)$

$$= \frac{-\partial\left(x^{\frac{m}{n}}\right)}{x^{\frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \partial x}{x^{2\frac{m}{n}}}$$

$$= -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} \partial x$$

Anmerkung. Potenzen mit veränderlichen Exponenten, und Logarithmen, lassen sich nicht nach vorigen Grundsätzen differenziren. Wir werden aber am gehörigen Orte sehen, wie man sich dabei verhalten soll.

§. 13.

Die äußersten Werthe einer veränderlichen Größe (les extrèmes valeurs) sind der größte und der kleineste Werth, welchen sie, vermöge ihrer Beschaffenheit und der vorgeschriebenen Bedingungen haben kann. Der größte Werth pfleget auch das Maximum und der kleineste das Minimum genannt zu werden.

Z. E. Ein Seherohr kann nicht länger ausgedehnet werden, als die Länge aller Stücke reichet. Es kann auch nicht kürzer zusammengezogen werden, als die Länge des größten Stückes beträgt. Hier ist also ein Maximum und ein Minimum.

§. 14.

Die Gränze einer Größe, ist eine andere Größe, der sie zwar nicht gleich werden kann, der sie sich aber, soviel als man will, nähern kann. Gesetzt, es soll jemand von einem Orte zum andern gehen, mit der Bedingung, daß er in der ersten Stunde den halben Weg zurück lege, in der folgenden Stunde die Hälfte des übrigen Weges, u. s. f. so wird er zwar nie den ganzen Weg zurück legen, sein Weg wird aber beständig dem ganzen Wege gleicher, oder der Unterschied wird beständig kleiner werden. Der ganze Weg ist also die Gränze seines zurückgelegten Weges.

§. 15.

Eine unbegränzte Größe ist eine Größe, die weder äußerste Werthe noch Gränzen hat, sondern die man so groß oder so klein annehmen kann, als man will.

§. 16.

Wenn man sich eine unbegränzte Größe als sehr klein vorstellet, und dabei denket, daß man sie immer noch kleiner annehmen kann, so nennet man eine solche Größe unendlich klein. Hingegen wenn man sich eine unbegränzte

gränzte Größe als sehr groß vorstellet, und dabei denket, daß sie noch immer größer angenommen werden kann, so nennet man sie eine **unendliche Größe**. Eine Größe, wobei man sich nicht diese Vergrößerung oder Verkleinerung ohne Ende oder ohne Gränzen vorstellet, heißt eine **endliche Größe**.

§. 17.

Eine unendlich kleine Differenz ist also eine Differenz, die man so klein annehmen kann, als man will.

§. 18.

Eine unvollständige Differenzial-Funkzion ist die Gränze der vollständigen Differenzial-Funkzion. Z. E. Es sey $z = xy$, so ist $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$. Wenn man $\Delta x\Delta z$ ausläßt, so entstehet $dz = ydy + xdy$. Diesen Werth kann zwar dz niemals erreichen, weil immer $dxdy$ ausbleibet. Je kleiner aber dx und dy angenommen werden, desto weniger beträgt der Mangel, folglich ist dz oder $xdy + ydx$ die Gränze von Δz oder $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$.

§. 19.

Wenn zwei Gleichungen so beschaffen sind, daß das erste Glied der einen das erste Glied der anderen, und das zweite Glied der einen das zweite Glied der anderen zur Gränze hat, so saget man, die zweite Gleichung sey die Gränze der ersten. Und in diesem Falle läßt sich leicht begreifen, daß, wenn man aus beiden Gleichungen den Werth einer nemlichen Größe ziehet, die Funkzion, welche diesen Werth in der zweiten Gleichung ausdrücket, auch die Gränze der Funkzion seyn muß, welche den nemlichen Werth in der ersten Gleichung ausdrücket. Also sind die Verhältnisse in der zweiten Gleichung die Gränzen der Verhältnisse der ersten Gleichung.

§. 20.

In einer Differenzial-Gleichung von zwei veränderlichen Größen, x und y, bringe man dy allein auf eine Seite, so bekömt man die Gränze des Werthes von dy in

einer Funkzion endlicher Größen, welche mit $\mathrm{d}x$ multipliziret ist. Eben so kann man die Gränze von $\mathrm{d}x$ in einer Funkzion von $\mathrm{d}y$ und endlichen Größen bekommen.

Es sey $xy + ax^3 = b + y^2 + x^4$

so ist $y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + 3ax^2\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y + 4x^3\mathrm{d}x$

oder $x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}y = 4x^3\mathrm{d}x - y\mathrm{d}x - 3ax^2\mathrm{d}x$

$$(x - 2y)\mathrm{d}y = (4x^3 - y - 3ax^2)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}y = \frac{4x^3 - y - 3ax^2}{x - 2y} \cdot \mathrm{d}x$$

§. 21.

Dividiret man nun beiderseits durch $\mathrm{d}x$, so bekömmt man die Gränze des Quozienten oder der Razion $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, in lauter endlichen Größen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4x^3 - y - 3ax^2}{x - 2y}$$

Die Gränze der Razion zweier unendlich kleiner Differenzen ist also allemal eine endliche Größe.

§. 22.

Aufgabe.

Eine Funkzion oder Gleichung zum zweiten, drittenmale u. s. f. differenziren.

Auflösung. Man betrachte nicht nur die veränderlichen Größen, sondern auch ihre ersten Differenziale als veränderlich, und differenzire übrigens nach den nemlichen Regeln, welche für die erste Differenziazion gegeben worden (§. 8, 9, 10, 11 und 12). Das zweite Differenzial einer veränderlichen Größe x wird durch $\mathrm{dd}x$ oder d^2x, das dritte durch $\mathrm{ddd}x$ oder d^3x, das vierte durch d^4x, und überhaupt das $n$te durch d^nx ausgedrücket.

Exem-

Exempel I. Es sey gegeben diese Gleichung

$$ay^2 = apx - px^2$$

Differenziret man zum erstenmale, so bekömmt man

$$2ay\,dy = ap\,dx - 2px\,dx$$

Will man nun zum zweitenmale differenziren, so behandele man y, x, dy und dx als veränderliche Größen. y hat wiederum dy zum Differenziale, x hat dx, dy hat d^2y, dx hat d^2x. Nach den gewöhnlichen Regeln ist also

$$d(y\,dy) = dy\,dy + y\,d^2y$$
$$d(dx) = d^2x$$
$$d(x\,dx) = dx\,dx + x\,d^2x$$

Man bekömmt also zur zweiten Differenzialgleichung

$$2a\,dy^2 + 2ay\,d^2y = ap\,d^2x - 2p\,dx^2 - 2px\,d^2x$$

Will man zum dritten male differenziren,

so hat	y	zum Differenziale	dy
: :	x	: : : :	dx
: :	dy	: : : :	d^2y
: :	dx	: : : :	d^2x
: :	d^2y	: : : :	d^3y
: :	d^2x	: : : :	d^3x

Nimmt man nun die Sätze einen nach den andern vor, so ist

$$d(dy^2) = 2dy\,d^2y$$
$$d(y\,d^2y) = dy\,d^2y + y\,d^3y$$
$$d(d^2x) = d^3x$$
$$d(dx^2) = 2dx\,d^2x$$
$$d(x\,d^2x) = dx\,d^2x + x\,d^3x$$

Multipliziret man nun noch das Differenzial eines jeden Satzes mt den beständigen Koeffizienten die dabei sind, so kömmt

$$4a\,dy\,d^2y + 2a\,dy\,d^2y + 2ay\,d^3y = ap\,d^3x - 4p\,dx\,d^2x$$
$$- 2p\,dx\,d^2x - 2px\,d^3x$$

oder $6a\,dy\,d^2y + 2ay\,d^3y = ap\,d^3x - 6p\,dx\,d^2x - 2px\,d^3x$

Auf einer ähnlichen Art kann man zum viertenmale differenziren, indem man beobachtet, daß $\mathfrak{d}(\mathfrak{d}^3 x) = \mathfrak{d}^4 x$, $\mathfrak{d}(\mathfrak{d}^3 y) = \mathfrak{d}^4 y$. Und so kann man immer weiter gehen.

Exempel II. Es sollen die nach einander folgenden Differenziale der Funkzion xy gefunden werden. Es sey

$$z = xy$$

so ist I) $\mathfrak{d}z = y\mathfrak{d}x + x\mathfrak{d}y$

Betrachtet man nun y, x, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}x$ und $\mathfrak{d}z$ als veränderlich, so wird

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{d}z) = \mathfrak{d}^2 z$$
$$\mathfrak{d}(y\mathfrak{d}x) = \mathfrak{d}x\mathfrak{d}y + y\mathfrak{d}^2 x$$
$$\mathfrak{d}(x\mathfrak{d}y) = \mathfrak{d}x\mathfrak{d}y + x\mathfrak{d}^2 y$$

Folglich bekommt man

II) $\mathfrak{d}^2 z = 2\mathfrak{d}x\mathfrak{d}y + y\mathfrak{d}^2 x + x\mathfrak{d}^2 y$

Betrachtet man nun y, x, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}^2 y$, $\mathfrak{d}^2 x$, und $\mathfrak{d}^2 z$ als veränderlich, so wird

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{d}^2 z) = \mathfrak{d}^3 z$$
$$\mathfrak{d}(\mathfrak{d}x\mathfrak{d}y) = \mathfrak{d}y\mathfrak{d}^2 x + \mathfrak{d}x\mathfrak{d}^2 y$$
$$\mathfrak{d}(y\mathfrak{d}^2 x) = \mathfrak{d}y\mathfrak{d}^2 x + y\mathfrak{d}^3 x$$
$$\mathfrak{d}(x\mathfrak{d}^2 y) = \mathfrak{d}x\mathfrak{d}^2 y + x\mathfrak{d}^3 y$$

Daraus bekömmt man

III) $\mathfrak{d}^3 z = 3\mathfrak{d}y\mathfrak{d}^2 x + 3\mathfrak{d}x\mathfrak{d}^2 y + y\mathfrak{d}^3 x + x\mathfrak{d}^3 y$

Betrachtet man ferner y, x, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}^2 y$, $\mathfrak{d}^2 x$, $\mathfrak{d}^3 y$, $\mathfrak{d}^3 x$, $\mathfrak{d}^3 z$ als veränderlich, so wird

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{d}^3 z) = \mathfrak{d}^4 z$$
$$\mathfrak{d}(\mathfrak{d}y\mathfrak{d}^2 x) = \mathfrak{d}^2 x\mathfrak{d}^2 y + \mathfrak{d}y\mathfrak{d}^3 x$$
$$\mathfrak{d}(\mathfrak{d}x\mathfrak{d}^2 y) = \mathfrak{d}^2 x\mathfrak{d}^2 y + \mathfrak{d}x\mathfrak{d}^3 y$$
$$\mathfrak{d}(y\mathfrak{d}^3 x) = \mathfrak{d}y\mathfrak{d}^3 x + y\mathfrak{d}^4 x$$
$$\mathfrak{d}(x\mathfrak{d}^3 y) = \mathfrak{d}x\mathfrak{d}^3 y + x\mathfrak{d}^4 y$$

Folglich,

$$\mathfrak{d}^4 z = 6\mathfrak{d}^2 x\mathfrak{d}^2 y + 4\mathfrak{d}y\mathfrak{d}^3 x + 4\mathfrak{d}x\mathfrak{d}^3 y + y\mathfrak{d}^4 x + x\mathfrak{d}^4 y$$

und so kann man immer weiter gehen.

Beweis. Die unvollständigen Differenzen der Funkzionen entstehen eigentlich aus den vollständigen, wenn man die Säze wegläßt, die gegen die übrigen sehr klein sind. Man könnte also die unvollständigen Differenzen nach der nemlichen Methode suchen wie die vollständigen. (XIV. Hauptst. §. 13). Es sey gegeben

$$z = xy$$

Man vergrößere z um $\mathrm{d}z$, x um $\mathrm{d}x$, y um $\mathrm{d}y$, so bekömmt man

$$z + \mathrm{d}z = (x + \mathrm{d}x)(y + \mathrm{d}y)$$

Man entwickele das Produkt im zweiten Gliede, und laße dabei den sehr kleinen Theil $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ weg, so hat man

$$\begin{array}{lll} \text{beinahe} & z + \mathrm{d}z = & xy + y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \\ \text{subtr.} & z \;.\;. = & xy \\ \hline & \text{I)}\quad \mathrm{d}z = & y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \end{array}$$

Man vergrößere wiederum $\mathrm{d}z$ um d^2z, y um $\mathrm{d}y$, x um $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ um d^2y, $\mathrm{d}x$ um d^2x, so entstehet

$$\mathrm{d}z + \mathrm{d}^2z = (y + \mathrm{d}y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}^2x) + (x + \mathrm{d}x)(\mathrm{d}y + \mathrm{d}^2y)$$

Man entwickele die Produkte, so entstehet eigentlich

$$\mathrm{d}z + \mathrm{d}^2z = y\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}^2x + \mathrm{d}y\mathrm{d}^2x + x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}x\mathrm{d}^2y$$

Hier müssen aber d^2z, d^2x, d^2y als noch weit kleinere Brüche als $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x$ betrachtet werden. Man rechne also jedes zweite Differenzial für ein Produkt von zwei sehr kleinen Brüchen, und laße die Säze aus, welche mehr als zwei sehr kleine Dimensionen enthalten, weil sie gegen die übrigen gar wenig ausmachen. Also fallen $\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x$ und $\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y$ weg, weil jeder dieser Säze für drei sehr kleine Dimensionen gezählet wird. Es ist folglich

$$\begin{array}{lll} \text{beinahe} & \mathrm{d}z + \mathrm{d}^2z = & y\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}^2x \\ & & + x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}^2y \\ \text{subtr.} & \mathrm{d}z \qquad = & y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}^2y \\ \hline \text{beinahe} & \text{II)}\quad \mathrm{d}^2z = & 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}^2x + x\mathrm{d}^2y \end{array}$$

Man vergrößere wiederum d^2z um d^3z, d^2y um d^3y, d^2x um d^3x, dy um d^2y, dx um d^2x, y um dy, x um dx, so wird

$$d^2z + d^3z = 2(dx + d^2x)(dy + d^2y) + (y + dy)$$
$$(d^2x + d^3x) + (x + dx)(d^2y + d^3y)$$

Man entwickele die Produkte zur rechten. Man rechne d^2y, d^2x für zwei sehr kleine Dimensionen, hingegen d^3y, d^3x für drei sehr kleine Dimensionen, und laße die Säze weg, welche mehr als drei sehr kleine Dimensionen ausmachen. Also

im Produkte $(dx + d^2x)(dy + d^2y)$ bleibet weg d^2xd^2y
" " " $(y + dy)(d^2x + d^3x)$ " " " dyd^3x
" " " $(x + dx)(d^2y + d^3y)$ " " " dxd^3y

Folglich kömmt heraus

beinahe $d^2z + d^3z = 2dxdy + 3dyd^2x + 3dxd^2y + yd^2x + yd^3x + xd^2y + xd^3y$

subtr. $d^2z \ldots = 2dxdy + yd^2x + xd^2y$

beinahe III) $d^3z = 3dyd^2x + 3dxd^2y + yd^3x + xd^3y$

Und so kann man weiter gehen. Aus allem diesen siehet man daß das vorgeschriebene Verfahren im Grunde nur eine Verkürzung des weitläuftigeren ist, welcher wir hier aus einander gesezet haben. Weil bei den höheren Differenzialien, dy, dx, d^2y, d^2x, und so ferner, wiederum um ihr Differenzial vergrößert werden, weil auch bei den Produkten wiederum der vierte Saz als sehr klein ausgelaßen wird, weil bei jedem Produkte nach der Subtrakzion der erste Saz wegfällt; so verfähret man ganz sicher, wenn man die schon vorhandenen Differenziale als veränderliche Größen betrachtet, und übrigens eben so rechnet, wie bei der ersten Differenziazion.

Ein

Ein anderer Beweis. Man suche die vollständigen Differenzen einer Funkzion, z. E. Es sey

$$z = xy$$

so ist $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$

$$\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$$

$$\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + 3\Delta y\Delta^2 x + 6\Delta^2 x\Delta^2 y + y\Delta^3 x$$
$$3\Delta y\Delta^3 x + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y + 3\Delta^2 x\Delta^3 y + 3\Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\Delta^3 y$$

&c. &c.

Nun nehme man an, Δx und Δy werden sehr kleine Brüche, $\Delta^2 x$ und $\Delta^2 y$ noch kleiner, so daß sie als Produkte von zwei sehr kleinen Brüchen betrachtet werden können, $\Delta^3 x$, $\Delta^3 y$ noch weit kleiner, so daß man sie als Produkte von drei sehr kleinen Brüchen betrachten kann. Dieses vorausgesetzet, behalte man in der ersten Differenz der Funkzion nur Sätze von einer einzigen sehr kleinen Ausmessung, in der zweiten Differenz behalte man nur zwei sehr kleine Ausmessungen, in der dritten nur drei, u. s. f. so bekömmt man

beinahe $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y$

beinahe $\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y$

beinahe $\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + 3\Delta y\Delta^2 x + y\Delta^3 x + x\Delta^3 y$

&c. &c.

oder wenn man das Zeichen der sehr kleinen Differenzen gebrauchet

$$dz = y\,dx + x\,dy$$
$$d^2 z = 2dx\,dy + y\,d^2 x + x\,d^2 y$$
$$d^3 z = 3dx\,d^2 y + 3dy\,d^2 x + y\,d^3 x + x\,d^3 y$$

&c. &c.

Man siehet, daß auf dieser Art das nemliche herauskömmt, was vermittelst der Regel herausgebracht worden. Dieses bestätiget also noch die Regel aus der Erfahrung.

§. 23.

§. 23.

Wenn eine Größe beständig um gleich viel zunehmen soll, so findet hier auch dasjenige Statt, was bei den vollständigen Differenzen bemerket worden. (XIV. Hauptst. §. 12. Zusatz). Es wird nemlich das beständige Differenzial z. E. $\mathrm{d}x$ eben so wie andere beständige Größen behandelt, oder es werden, nachdem die Differenziazion geschehen, die Sätze ausgelöschet, worinn sich die höheren Differenziale d^2x, d^3x, d^4x u. s. f. befinden.

Z. E. Man soll die auf einander folgenden Differenziale der Funkzion xy suchen, indem $\mathrm{d}x$ beständig ist; so bekömmt man

$$z = xy$$
$$\mathrm{d}z = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

Wird nun $\mathrm{d}x$ als beständig angesehen, so ist

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}^2z$$
$$\mathrm{d}(y\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}(x\mathrm{d}y) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}^2y$$

folglich

$$\mathrm{d}^2z = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}^2y$$

Ferner

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}^2z) = \mathrm{d}^3z$$
$$2\mathrm{d}(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y$$
$$\mathrm{d}(x\mathrm{d}^2y) = \mathrm{d}x\mathrm{d}^2y + x\mathrm{d}^3y$$

folglich

$$\mathrm{d}^3z = 3\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y + x\mathrm{d}^3z$$

und so gehet man weiter. Oder man differenzire erstlich, als wenn kein Differenzial beständig wäre, so kömmt

$$\mathrm{d}^2z = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}^2x + x\mathrm{d}^2y$$
$$\mathrm{d}^3z = 3\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y + 3\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x + y\mathrm{d}^3x + x\mathrm{d}^3y$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Nun laße man die Säze weg, wo $\mathfrak{d}^2x$ und $\mathfrak{d}^3x$ vorkommen, weil $\mathfrak{d}^2x=0$, $\mathfrak{d}^3x=0$, &c. so bekömmt man ebenfalls

$$\mathfrak{d}^2z=2\mathfrak{d}x\mathfrak{d}y+x\mathfrak{d}^2y$$
$$\mathfrak{d}^3z=3\mathfrak{d}x\mathfrak{d}^2y+x\mathfrak{d}^3y$$

&c. &c.

§. 24.

Wir haben beim Differenziren allemal vorausgesezet, daß die veränderlichen Größen zunehmen, sollte aber das Gegentheil Statt finden, und es wäre z. E. $\mathfrak{d}y$ oder $\mathfrak{d}^2y$, oder $\mathfrak{d}^3y$ negativ, so müste vor allen Säzen, welche eine unpaarige Potenz des negativen Differenzials enthalten, das Zeichen + in — oder — in + verwandelt werden, wie schon bei den vollständigen Differenzen bemerket worden (XIV. Hauptst. §. 13. Anm. 2).

§. 25.

Aufgabe.

Die höheren Differenziale einer Gleichung von zwei veränderlichen Größen x und y finden, so daß alle Säze die Razionen der Differenziale enthalten.

Auflösung. Nachdem man zum erstenmale differenziret hat, dividire man die Gleichung durch $\mathfrak{d}x$, und seze $\frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}x}=p$, so bekömmt man eine Gleichung zwischen drei veränderliche Größen x, y und p. Man differenzire, dividire wiederum durch $\mathfrak{d}x$, und seze $\frac{\mathfrak{d}p}{\mathfrak{d}x}=q$, so bekömmt man eine Gleichung zwischen den veränderlichen Größen x, y, p und q. Man differenzire weiter, dividire durch $\mathfrak{d}x$, und seze $\frac{\mathfrak{d}q}{\mathfrak{d}x}=r$. So fahre man fort, indem man annimmt

$$\frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}x}=p,\ \frac{\mathfrak{d}p}{\mathfrak{d}x}=q,\ \frac{\mathfrak{d}q}{\mathfrak{d}x}=r,\ \frac{\mathfrak{d}r}{\mathfrak{d}x}=s,\ \frac{\mathfrak{d}s}{\mathfrak{d}x}=t, \text{ u. s. f.}$$

Auf der Art bekömmt man sehr leicht die höheren Differenziale. Es bleibet aber noch übrig die Größen *p*, *q*, *r*, *s*, &c., durch Funkzionen von ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, &c. ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, &c., zu bestimmen.

Erstlich ist $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, wie man es vorausgesetzet hat. Die anderen Buchstaben *q*, *r*, *s*, &c., bekommen verschiedene Werthe, nachdem das eine oder andere Differenzial als beständig angesehen wird.

Wenn kein Differenzial beständig ist, so wird, wenn man nach den gewöhnlichen Regeln differenziret

$$q = \frac{\partial p}{\partial x} = \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) : \partial x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$$

$$r = \frac{\partial q}{\partial x} = \partial\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right) : \partial x$$

$$= \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2$$

&c. &c.

Will man ∂x für beständig annehmen, so muß man in vorigen Formeln die Säße auslöschen, die durch $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, &c., multipliziret sind, und man behält

$$q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$r = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

$$s = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

&c. &c.

Ist

Ist δy beständig, so verschwinden die Säße, welche $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, u. s. f. enthalten, und es bleibet übrig

$$q = -\frac{\delta y}{\delta x} \cdot \frac{\delta^2 x}{\delta x^2}$$

$$r = -\frac{\delta y}{\delta x} \cdot \frac{\delta^3 x}{\delta x^3} + 3\frac{\delta y}{\delta x} \cdot \left(\frac{\delta^2 x}{\delta x^2}\right)^2$$

&c. &c.

Man kann auch irgend eine Funkzion der veränderlichen Größen und ihrer Differenziale als beständig betrachten. Gesetzet, es soll $y\delta x$ beständig seyn. Folglich muß die zweite Differenz $\delta(y\delta x)$ null seyn. Es wird also

$$\delta(y\delta x) = 0$$

oder $$\delta x\delta y + y\delta^2 x = 0$$

$$y\delta^2 x = -\delta x\delta y$$

$$\delta^2 x = -\frac{\delta x\delta y}{y}$$

Diesen Werth von $\delta^2 x$ setze man in der Formel welche q ausdrücket, wenn nichts beständig ist, so kömmt

$$q = \frac{\delta^2 x}{\delta x^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$$

Dieses ist also der Werth von q, wenn $y\delta x$ beständig ist. Man nehme wiederum die Gleichung

$$\delta x\delta y + y\delta^2 x = 0$$

und differenzire zum zweiten male, so kömmt heraus

$$\delta y\delta^2 x + \delta x\delta^2 y + \delta^2 x\delta y + y\delta^3 x = 0$$

woraus man ziehet

$$\delta^3 x = -\frac{2\delta y\delta^2 x + \delta x\delta^3 y}{y}$$

Diesen

Diesen Werth von $\partial^3 x$ setze man in die Formel, welche r ausdrücket, wenn alles veränderlich ist, so entstehet

$$r = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{4}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

für den Fall wo $y \partial x$ beständig ist.

Gesetzet es soll beständig seyn $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ oder $(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{1}{2}}$, so hat man

$$\partial(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}(\partial x^2 + \partial y^2)^{-\frac{1}{2}} \partial(\partial x^2 + \partial y^2) = 0$$

oder wenn man beiderseits durch $\frac{1}{2}(\partial x^2 + \partial y^2)^{-\frac{1}{2}}$ dividiret

$$\partial(\partial x^2 + \partial y^2) = 0$$

$$2\partial x \partial^2 x + 2\partial y \partial^2 y = 0$$

$$\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$$

$$\partial^2 x = \frac{-\partial y \partial^2 y}{\partial x}$$

Setzet man diesen Werth von $\partial^2 x$ in der Formel für q, wenn alles veränderlich ist, so kömmt

$$q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

für den Fall wo $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig ist. Man nehme die Gleichung

$$\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$$

wieder vor, und differenzire, so kömmt

$$\partial^2 x^2 + \partial x \partial^3 x + \partial^2 y^2 + \partial y \partial^3 y = 0$$

daher ist $\partial^3 x = - \dfrac{\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial y \partial^3 y}{\partial x}$

Wenn

Wenn dieser Werth in die Formel gesetzet wird, welche r ausdrücket, wenn nichts beständig ist, so erhält man

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

für den Fall wo $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig ist.

Exempel. Es sey

$$ay^5 = bx^4$$

so bekömmt man, wenn man zum ersten male differenziret

$$5ay^4dy = 4bx^3dx$$

$$\text{oder} \quad 5ay^4\frac{dy}{dx} = 4bx^3$$

$$\text{oder} \quad 5ay^4p = 4bx^3$$

differenziret man zum zweitenmale, so kömmt

$$20.apy^3dy + 5ay^4dp = 12bx^2dx$$

$$\text{oder} \quad 20.apy^3\frac{dy}{dx} + 5ay^4\frac{dp}{dx} = 12bx^2$$

$$\text{oder} \quad 20.ay^3p^2 + 5ay^4q = 12bx^2$$

Wenn man weiter differenziret, so erhält man

$$40.ay^3pdp + 60.ap^2y^2dy + 20.aqy^3dy + 5ay^4dq = 24.bxdx$$

$$\text{oder} \quad 40.ay^3p\frac{dp}{dx} + 60.ap^2y^2\frac{dy}{dx} + 20.aqy^3\frac{dy}{dx} + 5ay^4\frac{dq}{dx} = 24.bx$$

$$\text{oder} \quad 40.ay^3pq + 60.ay^2p^3 + 20.ay^3pq + 5ay^4r = 24.bx$$

und so weiter. Es bleibet nun noch übrig, daß man anstatt p, q und r ihre Werthe setze. Soll dx beständig seyn, so wird

$$p = \frac{dy}{dx},\ q = \frac{d^2y}{dx^2},\ r = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Folglich ist die zweite Differenzialgleichung

$$20.ay^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5ay^4\frac{d^2y}{dx^2} = 12bx^2$$

 und

und die dritte

$$60.\,ay^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+60.\,ay^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+5ay^4\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=24bx$$

Soll ein anderes Differenzial als $\mathrm{d}x$ beständig seyn, so muß man anstatt q und r die Werthe setzen, die der Voraussetzung gemäß sind? Wenn nichts beständig seyn soll, so wird die zweite Differenzialgleichung

$$20.\,ay^3\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+5ay^4\left[\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2}\right]=12bx^2$$

§. 26.

Aufgabe.

Eine Differenzial-Funkzion, oder Differenzial-Gleichung so verändern, daß ein anderes Differenzial oder gar keines darinn beständig sey.

Auflösung. Wenn man weiß, welches Differenzial als beständig betrachtet worden, so suche man in derselben Hypothese oder Voraussetzung die Werthe von d^2x, d^3x, &c., d^2y, d^3y, &c., in lauter Funkzionen von p, q, r, u. s. f. Diese Werthe setze man in die gegebene Funkzion oder Gleichung. Nun setze man anstatt p, q, r, &c., die Werthe, welche diese Größen bekommen sollen, wenn ein anderes Differenzial beständig ist.

Exempel I. Es sey gegeben diese Differenzial-Funkzion

$$\frac{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^3}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y}$$

welche gefunden worden, indem $\mathrm{d}x$ beständig war. Man will wissen, welche Gestalt die nemliche Differenzial-Funkzion bekommen muß, wenn $\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)}$ beständig ist. In der ersten Voraussetzung ist

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=q$$

folglich

folglich $\partial^2 y = q\partial x^2$

Man setze also $q\partial x^2$ anstatt $\partial^2 y$, so entstehet

$$\frac{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)^3}}{q\partial x^3}$$

In der neuen Voraussetzung wird aber

$$q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Setzet man nun diesen Werth von q in der leztgefundenen Funkzion und machet übrigens die gewöhnlichen Verkürzungen, so findet man

$$\frac{\partial x\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial y}$$

Und dieses ist die Gestalt, welche die Differenzial-Funkzion bekommen muß, wenn $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ beständig ist.

Exempel II. Es sey gegeben

$$\frac{\partial x\partial^3 y}{x\partial^2 y}$$

worinn ∂x beständig ist. Es soll aber $y\partial x$ beständig seyn. In der Voranssetzung daß ∂x beständig ist, hat man

$$q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ folglich } \partial^2 y = q\partial x^2$$

$$r = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \text{ folglich } \partial^3 y = r\partial x^3$$

Setzet man diese Werthe von $\partial^2 y$, $\partial^3 y$ in der gegebenen Funkzion, so wird sie

$$\frac{r\partial x^2}{xq}$$

Nun setze man anstatt r und q die Werthe, welche diese Größen bekommen, wenn $y\,dx$ beständig ist, so kömmt

$$\frac{\left[\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{4}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]dx^2}{x\left[\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

oder wenn man die gewöhnlichen Verkürzungen anbringet

$$\frac{dx(y^2d^3y + 4y\,dy\,d^2y + dy^3)}{xy^2d^2y + xy\,dy^2}$$

diese Gestalt bekömmt die Funkzion, wenn $y\,dx$ beständig seyn soll.

§. 27.

Eine Differenzial-Funkzion von zwei veränderlichen Größen, behält immer den nemlichen Werth, man mag das eine oder das andere Differenzial als beständig betrachten.

Es sey y eine Funkzion von x, so kann die Gleichung zwischen y und x allemal durch eine endliche oder unendliche Reihe von dieser Gestalt ausgedrücket werden

$$y = A + Bx^a + Cx^b + Dx^c + Ex^d + \&c.$$

Wir wollen anfänglich nur zwei Sätze von dieser Reihe nehmen. Es sey also

$$y = A + Bx^n$$

Wenn man zum erstenmale differenziret, so wird

$$dy = nBx^{n-1}dx$$

oder $$\frac{dy}{dx} = nBx^{n-1}$$

oder, wenn man, wie im vorigen Paragraph annimmt $\frac{dy}{dx}=p$, so ist

$$p = nBx^{n-1}$$

Man

Man differenzire zum zweitenmale, so ist

$$\partial p = n(n-1)Bx^{n-2}\partial x$$

oder $\frac{\partial p}{\partial x} = n(n-1)Bx^{n-2}$

oder, wenn man setzet $\frac{\partial p}{\partial x} = q$

$$q = n(n-1)Bx^{n-2}$$

Man differenzire zum drittenmale, so wird

$$\partial q = n(n-1)(n-2)Bx^{n-3}\partial x$$

oder $\frac{\partial q}{\partial x} = n(n-1)(n-2)Bx^{n-3}$

oder, wenn man annimmt $\frac{\partial q}{\partial x} = r$,

$$r = n(n-1)(n-2)Bx^{n-3}$$

Es ist, mit einem Worte

$$p = nBx^{n-1}$$
$$q = n(n-1)Bx^{n-2}$$
$$r = n(n-1)(n-2)Bx^{n-3}$$
&c. &c.

Hier siehet man freilich, daß p, q, r, &c. verschiedene Gestalten annehmen werden, nachdem man ∂x, oder ∂y oder $y\partial x$ oder $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, u. s. f. oder auch gar kein Differenzial für beständig annehmen wird. Aber demohnerachtet werden die Größen p, q, r, allemal den nemlichen Werth behalten, welcher durch das zweite Glied jeder Gleichung ausgedrücket ist. Das nemliche findet Statt, wenn mehrere Sätze da sind, welche den Werth von y ausdrücken.

Nun aber kann jede Differenzial-Funkzion in eine Funkzion von p, q, r, u. s. f. verwandelt werden, wie man im vorigen Paragraph gesehen hat. Da also die Werthe von p, q, r, &c., die nemlichen bleiben, man

mag für beständig ansehen, welches Differenzial man will, so kann folglich jede aufgegebene Differenzial-Funkzion wohl der Gestalt nach verändert werden; es bleibet aber ihr Werth unverändert.

§. 28.

Nachdem man eine Funkzion differenziret hat, wenn man alle Sätze sammlet, die mit dem nemlichen Differenziale multipliziret sind, so bekömmt man eine **Parzial-Differenz** (différence partielle).

Zum Exempel, man differenzire diese Funkzion

$$ax^2yz + bxyz^2$$

so kömmt

$$(2axyz + byz^2)dx$$
$$+ (ax^2z + bxz^2)dy$$
$$+ (ax^2y + 2bxyz)dz$$

Dieses sind die drei Parzial-Differenzen der gegebenen Funkzion.

Wenn eine gegebene Differenzial-Funkzion die gehörigen Sätze und Parzial-Differenzen enthält, so nennet man sie eine **richtige Differenz** oder ein **richtiges Differenzial** (différentielle exacte). Es giebt gewisse Verhältnisse die da Statt finden müssen, wenn ein Differenzial richtig seyn soll. Die Gleichungen welche solche Verhältnisse ausdrücken, werden **bedingende Gleichungen** (équations de condition) genannt.

§. 29.

Aufgabe.

Die Parzial-Differenzen einer Funkzion finden.

Auflösung. Man differenzire die gegebene Funkzion erstlich nur in Betrachtung einer einzigen veränderlichen Größe, und behandele die übrigen, als wären sie beständig. Eben so verfahre man mit der zweiten, dritten, u. s. f. veränderlichen Größe. So bekömmt man alle Parzialdifferenzen.

Exem-

Exempel. Es sey die gegebene Funkzion

$$a x^n y^m z^k$$

So bekömmt man, wenn x allein veränderlich ist

$$a n y^m z^k x^{n-1}\,dx$$

Wenn y allein veränderlich ist

$$a m x^n z^k y^{m-1}\,dy$$

und wenn z allein veränderlich ist

$$a k x^n y^m z^{k-1}\,dz$$

Dieses sind die drei Parzialdifferenzen. Nimmt man sie alle drei zusammen, so bekömmt man das richtige Differenzial

$$a n y^m z^k x^{n-1}\,dx + a m x^n z^k y^{m-1}\,dy + a k x^n y^m z^{k-1}\,dz.$$

Auf einer ähnlichen Art muß man verfahren, wenn die Funkzion aus mehreren Sätzen bestehet.

Zusatz. Hieraus entstehet ein neuer Weg, um die Funkzionen mehrerer veränderlicher Größen zu differenziren. Man darf nur für jede veränderliche Größe besonders differenziren, und hernach die Parzial-Differenzen zusammen nehmen. Gesetzet es soll differenziret werden

$$\sqrt[3]{(x^3 + y z^2)} \text{ oder } (x^3 + y z^2)^{\frac{1}{3}}$$

Wenn man für x allein differenziret, so kömmt

$$(x^3 + y z^2)^{-\frac{2}{3}} x^2\,dx$$

Für y allein kömmt

$$\tfrac{1}{3}(x^3 + y z^2)^{-\frac{2}{3}} z^2\,dy$$

Für z allein kömmt

$$\tfrac{2}{3}(x^3 + y z^2)^{-\frac{2}{3}} y z\,dz$$

Folglich ist das richtige Differenzial

$$(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}x^2dx+\tfrac{1}{3}(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}z^2dy+\tfrac{2}{3}(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}yzdz$$

oder $(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}(x^2dx+\frac{1}{3}z^2dy+\frac{2}{3}yzdz)$

oder $\dfrac{x^2dx+\frac{1}{3}z^2dy+\frac{2}{3}yzdz}{\sqrt[3]{(x^3+yz^2)^2}}$

oder $\dfrac{3x^2dx+z^2dy+2yzdz}{3\sqrt[3]{(x^3+yz^2)^2}}$

§. 30.

Es seyen in dem richtigen Differenziale einer Funkzion von zwei veränderlichen Größen x und y, die beiden Parzial-Differenzen Mdy und Ndx, wo unter M und N Funkzionen von x und y verstanden werden. Wenn man die Funkzion M in Betrachtung des x allein, und N in Betrachtung des y allein differenziret, so müssen die Koeffizienten von dx in dem einen, und von dy in dem anderen dieser Differenziale einander gleich seyn.

Um dieses zu beweisen, sey z eine Funkzion von x und y, und es werde

$$dz=Mdy+Ndx$$

so daß M und N Funkzionen von x und y vorstellen. Man stelle sich vor, daß die Funkzion z zu π werde, wenn man in derselben $y+dy$ anstatt y setzet, und die Potenzen von dy wegläßt, die da höher sind, als die erste.

Subtrahiret man nun z von π, so bekömmt man das Differenzial der Funkzion in Betrachtung des y allein, und als wenn x beständig wäre. Folglich ist

$$\pi-z=Mdy$$

Ferner stelle man sich vor, daß z zu λ werde, wenn man $x+dx$ anstatt x setzet, und die höheren Potenzen von dx

weg-

wegläßt. Wenn man nun $\mathfrak{z}$ subtrahiret, so bekömmt man das Differenzial in Betrachtung des x allein, und folglich wird

$$\Lambda - \mathfrak{z} = \mathrm{N}dx$$

Gesetzet, die Funkzion $\mathfrak{z}$ wird zu Z, wenn man darinn sowohl x um dx als y um dy vergrößert, und immer die höheren Potenzen von dx und dy ausläßt. Wenn man in Π, wo schon y um dy vergrößert ist, noch x um dx vergrößert, so muß Π auch $= \mathrm{Z}$ werden; und wenn man in Λ, wo x schon um dx vergrößert ist noch y um dy vergrößert, so muß ebenfalls $\Lambda = \mathrm{Z}$ werden.

Laßt uns nun diese Gleichung

$$\mathrm{M}dy = \Pi - \mathfrak{z}$$

in Betrachtung des x allein differenziren. Wir wollen annehmen, es sey $d\mathrm{M} = m dx$, wenn y unverändert bleibet. Um das zweite Glied der Gleichung in Betrachtung des x allein zu differenziren, muß man in $\Pi - \mathfrak{z}$, $x + dx$ anstatt x setzen, und $\Pi - \mathfrak{z}$ subtrahiren. Setzet man $x + dx$ anstatt x in Π, so wird Π zu Z. Setzet man auch in $\mathfrak{z}$, $x + dx$ anstatt x, so wird $\mathfrak{z}$ zu Λ, also wird $\Pi - \mathfrak{z}$ zu $\mathrm{Z} - \Lambda$, und wenn man $\Pi - \mathfrak{z}$ subtrahiret, so wird

$$m dx dy = (\mathrm{Z} - \Lambda) - (\Pi - \mathfrak{z})$$

oder $$m dx dy = \mathrm{Z} - \Lambda - \Pi + \mathfrak{z}$$

Nun müssen wir auch die andere Gleichung in Betrachtung des y differenziren, nemlich

$$\mathrm{N}dx = \Lambda - \mathfrak{z}$$

Gesetzet, es sey $d\mathrm{N} = n dy$. Wenn man in Λ, wo schon x um dx vergrößert worden, noch y um dy vergrößert, so wird Λ zu Z. Hingegen, wenn man in $\mathfrak{z}$, das y um dy vergrößert, so wird $\mathrm{Z} = \Pi$. Also wird $\Lambda - \mathfrak{z}$ zu $\mathrm{Z} - \Pi$. Subtrahiret man davon $\Lambda - \mathfrak{z}$, so wird

$$n dy dx = (\mathrm{Z} - \Pi) - (\Lambda - \mathfrak{z})$$

oder $$n dy dx = \mathrm{Z} - \Pi - \Lambda + \mathfrak{z}$$

Es ist also

$$m\,dx\,dy = Z - \Lambda - \Pi + \zeta$$

oder $$n\,dy\,dx = Z - \Pi - \Lambda + \zeta$$

folglich ist $m\,dx\,dy = n\,dy\,dx$, und also auch $n = m$. Das heißt, in der Gleichung

$$dz = M\,dy + N\,dx$$

wenn $dM = m\,dx$ in Betrachtung des x allein, und $dN = n\,dy$ in Betrachtung des y allein, so muß nothwendig $m = n$ seyn.

Wir wollen zum Beispiel diese Funkzion nehmen

$$ax^2y^2 + by^3 + cxy$$

Man differenzire, so kömmt

$$(2ax^2y + 3by^2 + cx)\,dy + (2ay^2x + cy)\,dx$$

Hier ist

$$M = 2ax^2y + 3by^2 + cx$$

und $$N = 2ay^2x + cy$$

Man differenzire M in Betrachtung des x allein, und als wenn y beständig wäre, so kömmt

$$(4axy + c)\,dx$$

und hier ist

$$m = 4ax + c$$

Man differenzire auch N in Betrachtung des y allein, so kömmt

$$(4axy + c)\,dy$$

Hier ist $n = 4axy + c$, und man siehet, daß $n = m$.

§. 31.

In einer Differenzial-Funkzion von mehr als zwei veränderlichen Größen; wenn man die Parzial-Differenzen zwei und zwei vornimmt, und jeden Koeffizienten in Betrachtung der anderen veränderlichen Größe differenziret; so werden die beiden neuen Koeffizienten einander gleich.

Es sey gegeben folgende Funkzion von vier veränderlichen Größen

$$vxyz + v^2z^2 + x^3y + yz^4$$

so wird das Differenzial

$$\begin{aligned}&(xyz + 2z^2v)\,dv\\ &+(vyz + 3yx^2)\,dx\\ &+(vxz + x^3 + z^4)\,dy\\ &+(vxy + 2v^2z + 4yz^3)\,dz\end{aligned}$$

Wenn man nur in Betrachtung des v und x allein differenziret hätte, so würde man bekommen haben

$$\begin{aligned}&(xyz + 2z^2v)\,dv\\ &+(vyz + 3yx^2)\,dx\end{aligned}$$

Und zufolge des vorigen Paragraphs muß $xyz + 2z^2v$, in Betrachtung des x differenziret, den nemlichen Koeffizienten geben als $vyz + 3yx^2$, in Betrachtung des v differenziret.

Wird die Funkzion in Betrachtung des v und y differenziret, so kömmt

$$\begin{aligned}&(xyz + 2vz^2)\,dv\\ &+(vxz + x^3 + z^4)\,dy\end{aligned}$$

und hier muß $xyz + 2vz^2$, in Betrachtung des y differenziret, einen eben so großen Koeffizienten geben, als wenn man $vxz + x^3 + z^4$ in Betrachtung des v differenziret. Eben diese Bewandniß hat es mit jedem anderen Paare der Parzial-Differenzen.

Zusatz. Es sey überhaupt

$$dU = M\,dv + N\,dx + P\,dy + Q\,dz$$

wo U eine Funkzion von v, x, y und z ist, und wo M, N, P, Q, die Koeffizienten der Parzial-Differenzen sind. Nimmt man die Parzial-Differenzen paarweise, so entstehen folgende Verhältnisse

I°) M,

I°) M, in Betrachtung des x differenziret
=N, in Betrachtung des v differenziret.

II°) M, in Betrachtung des y differenziret
=P, in Betrachtung des v differenziret.

III°) M, in Betrachtung des z differenziret
=Q, in Betrachtung des v differenziret.

IV°) N, in Betrachtung des y differenziret
=P, in Betrachtung des x differenziret.

V°) N, in Betrachtung des z differenziret
=Q, in Betrachtung des x differenziret.

VI°) P, in Betrachtung des z differenziret
=Q, in Betrachtung des y differenziret.

Diese Verhältnisse können folgendermaßen kürzer ausgedrücket werden.

I°) ∂M für $x = \partial N$ für v

II°) ∂M für $y = \partial P$ für v

III°) ∂M für $z = \partial Q$ für v

IV°) ∂N für $y = \partial P$ für x

V°) ∂N für $z = \partial Q$ für x

VI°) ∂P für $z = \partial Q$ für y

Jedoch bei allen diesen Gleichungen verstehet sich, daß nur die Koeffizienten gleich sind. Es sey z. E.

$$\partial M \text{ für } x = m\partial x$$
$$\partial N \text{ für } v = n\partial v$$

so ist nicht eigentlich $m\partial x = n\partial v$, sondern $m = n$. Dividiret man also vorige beide Gleichungen, die erste durch ∂x, und die andere durch ∂v, so entstehet

$$\frac{\partial M}{\partial x} \text{ für } x = m$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} \text{ für } v = n$$

und

und weil $m = n$, so ist

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial v}$$

wohl verstanden, daß hier in jedem Zähler nur in Betrachtung der Größe differenziret wird, deren Differenzial im Nenner stehet. Dieses vorausgesetzet, so können die sechs obigen Verhältnisse auch folgendermaßen ausgedrücket werden

$$\text{I}^\circ)\ \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial v}$$

$$\text{II}^\circ)\ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial v}$$

$$\text{III}^\circ)\ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial v}$$

$$\text{IV}^\circ)\ \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\text{V}^\circ)\ \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\text{VI}^\circ)\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Diese sechs Gleichungen sind lauter bedingende Gleichungen (§. 28) welche Statt finden müssen, wenn das Differenzial einer Funkzion von v, x, y, z richtig seyn soll. Auf einer ganz ähnlichen Art findet man die bedingenden Gleichungen für mehr oder weniger als vier veränderliche Größen.

§. 32.

Wenn $\partial z = M\partial y + N\partial x$, und z eine homogene Funkzion von x und y ist, von der $n$ten Ordnung ist, so wird $nz = My + Nx$.

Es

Es sey $y = qx$, wo q eine Funkzion von x und beständigen Größen vorstellet. Man setze in der Funkzion z allenthalben qx anstatt x, und es werde dadurch M zu M′, N zu N′, und z zu Qx^n. Es wird also seyn

$$d(Qx^n) = M'dy + N'dx$$

Weil nun $y = qx$, so ist $dy = qdx + xdq$, folglich

$$d(Qx^n) = M'(qdx + xdq) + N'dx$$

$$\text{oder } d(Qx^n) = M'qdx + M'xdq + N'dx$$

$$\text{oder } d(Qx^n) = (M'q + N')dx + M'xdq$$

In dieser lezten Gleichung, ist $(M'q + N')dx$ das Differenzial von Qx^n in Betrachtung des x allein. Wenn man also Qx^n in Betrachtung des x allein differenziret, so entstehet

$$nQx^{n-1}dx = (M'q + N')dx$$

$$\text{und } nQx^{n-1} = M'q + N'$$

$$\text{oder } \frac{n}{x}Qx^n = M'q + N'$$

Weil wir angenommen haben $y = qx$, so ist $q = \frac{y}{x}$.

Sezet man also wiederum $\frac{y}{x}$ anstatt q, so muß M′ wiederum zu M werden, N′ zu N und Qx^n zu z. Es wird folglich

$$\frac{n}{x}z = M\frac{y}{x} + N$$

$$\text{oder } nz = My + Nx$$

Also, wenn $dz = Mdy + Ndx$, und z ist eine homogene Funkzion von x und y, von der $n$ten Ordnung, so entstehet z, $n$mal, wenn man jeden Koeffizienten der Parzial-Differenzen, mit jeder veränderlichen Größe multipliziret.

Es

Es sey folgende Funkzion gegeben

$$z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + fy^3$$

so ist $dz = (bx^2 + 2cxy + 3fy^2)\,dy$
$+ (3ax^2 + 2byx + cy^2)\,dx$

Man multiplizire den ersten Koeffizienten mit y, den zweiten mit x, und addire beide Produkte.

$$\begin{array}{r} bx^2y + 2cxy^2 + 3fy^3 \\ + 3ax^3 + 2bx^2y + cxy^2 \\ \hline 3ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + 3fy^3 \end{array}$$

oder $3(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + fy^3) = 3z$

Hier hat man also aus beiden Parzial-Differenzen die homogene Funkzion, woraus sie entstanden sind, so viel mal gefunden, als die Funkzion veränderliche Dimensionen hat.

§. 33.

Es sey $dz = M\,dy + N\,dx$, und z sey eine homogene Funkzion von x von der $n$ten Ordnung, so sind die Koeffizienten der Parzial-Differenzen, nemlich M und N auch homogene Funkzionen von x und y, aber von der $n-1$ten Ordnung.

Es sey $z = x^r y^s$

so wird $dz = ry^s x^{r-1}\,dx + sx^r y^{s-1}\,dy$

Hier siehet man, daß die Koeffizienten $ry^s x^{r-1}$ und $sx^r y^{s-1}$ eine veränderliche Dimension weniger haben als z. Das nemliche muß geschehen, wenn die Funkzion z aus mehr homogenen Sätzen bestehet.

Siebenzehntes Hauptstück.

Von einigen Anwendungen der Differenzial-Rechnung.

§. 1.

Aufgabe.

Die vollständige Differenz einer Funkzion von x, vermittelst der unvollständigen oder unendlich kleinen Differenzen, finden.

Auflösung. Es sey y gleich einer Funkzion von x, so wird

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial x^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial x^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

eine Formel worinn ∂x als beständig angesehen wird. Das heißt, man differenziret die gegebene Gleichung zwischen y und x mehrmal nach einander, indem man ∂x als beständig behandelt. Man ziehet aus den Differenzial-Gleichungen die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, &c. Man multipliziret $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit Δx, das ist, mit der Größe, um welche x zunehmen soll. Man multipliziret $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mit $\frac{\Delta x^2}{1.2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ mit $\frac{\Delta x^3}{1.2.3}$, u. s. f. Das Aggregat aller dieser Produkte, ins Unendliche fortgesetzet, giebet Δy oder die Vergrößerung des y.

Beweis.

Beweis. Wie auch die Funkzion beschaffen sey, so läßt sie sich doch allemal durch eine Reihe von dieser Gestalt vorstellen

$$y = a + bx^m + c^n + ex^q + \&c.$$

Wir wollen nur annehmen, es sey

$$y = a + bx^m$$

denn was vom Satze bx^m gelten wird, muß auch von allen übrigen gelten. Ist $y = a + bx^m$, so wird

$$\begin{aligned} \Delta y = {} & bmx^{m-1}\Delta x \\ & + b\frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}\Delta x^2 \\ & + b\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{m-3}\Delta x^3 \\ & + b\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{m-4}\Delta x^4 + \&c. \end{aligned}$$

Man suche nun die auf einander folgenden Differenziale von $y = a + bx^m$ und betrachte ∂x als beständig, so ist

$$\begin{aligned} \partial y &= bmx^{m-1} \\ \partial^2 y &= bm(m-1)x^{m-2}\partial x^2 \\ \partial^3 y &= bm(m-1)(m-2)x^{m-3}\partial x^3 \\ \partial^4 y &= bm(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}\partial x^4 \\ & \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= bmx^{m-1} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= bm(m-1)x^{m-2} \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} &= bm(m-1)(m-2)x^{m-3} \\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= bm(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} \\ & \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Multipliziret man nun $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit $\frac{\Delta x}{1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mit $\frac{\Delta x^2}{1.2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ mit $\frac{\Delta x^3}{1.2.3}$, u. s. f. so wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} = bmx^{m-1}\Delta x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} = b\frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}\Delta x^2$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} = b\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{m-3}\Delta x^3$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} = b\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{m-4}\Delta x^4$$

&c. &c.

Es ist aber das Aggregat aller zweiten Glieder dieser Gleichungen der oben gefundene Werth von Δy, folglich ist auch das Aggregat der ersten Glieder $= \Delta y$, und man hat

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \&c.\ \&c.$$

§. 2.

Aufgabe.

Vermittelst der Differenzial-Rechnung den Werth finden, welchen eine Funkzion von x bekömmt, wenn x um Δx zunimmt.

Auflösung. Es sey y eine Funkzion von x. Es werde y zu Y, wenn x zu $x + \Delta x$ wird, so ist

$$Y = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \&c.$$

eine Formel, worinn ∂x als beständig betrachtet werden muß.

Beweis.

Beweis. Aus vorigen §. ist

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{\&c.}$$

Folglich

$$y + \Delta y = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{\&c.}$$

Es ist aber $y + \Delta y$ nichts anders als Y. Also ist

$$Y = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{\&c.}$$

§. 3.

Aufgabe.

Eine binomische Größe zu einer negativen oder gebrochenen Potenz erheben.

Vorbereitung. Es sey $y = x^{-n}$, so bekömmt man, wenn man differenziret, und ∂x beständig ist,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -nx^{-n-1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -n(-n-1)x^{-n-2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -n(-n-1)(-n-2)x^{-n-3}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -n(-n-1)(-n-2)(-n-3)x^{-n-4}$$

&c. &c.

 Sezet

Setzet man diese Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, in die Formel des vorigen Paragraphs, so wird

$$Y \text{ oder } (x + \Delta x)^{-n} = x^{-n} - nx^{-n-1}\Delta x + \frac{-n(-n-1)}{1.\ 2} x^{-n-2}\Delta x^2 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{-n-3}\Delta x^3 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{-n-4}\Delta x^4 \text{ \&c. \&c.}$$

Es sey $y = x^{\frac{m}{n}}$, so wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right) x^{\frac{m}{n}-2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right) x^{\frac{m}{n}-3}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right) x^{\frac{m}{n}-4}$$

&c. &c.

Setzet man diese Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, &c. in die Formel des vorigen Paragraphs, so wird

Y oder

Y oder $(x+\Delta x)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$

$$+\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\Delta x$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\quad 2}x^{\frac{m}{n}-2}\Delta x^2$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\quad 2.\quad 3}x^{\frac{m}{n}-3}\Delta x^3$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}x^{\frac{m}{n}-4}\Delta x^4$$

&c. &c.

Wenn man nun anstatt $x+\Delta x$ setzet $a+b$, so bekömmt man für negative Exponenten

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}b + \frac{-n(-n-1)}{1.\quad 2}a^{-n-2}b^2$$

$$+\frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.\quad 2.\quad 3}a^{-n-3}b^3 + \text{\&c.}$$

und für gebrochene Exponenten

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}b + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\quad 2}a^{\frac{m}{n}-2}b^2$$

$$+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\quad 2.\quad 3}a^{\frac{m}{n}-3}b^3 + \text{\&c.}$$

Auflösung. Man halte sich bei negativen und gebrochenen Exponenten an der Newtonianischen Regel (V. Hauptst. §. 29) eben sowohl als bei ganzen und positiven Exponenten.

Anmerkung. Dieses ist was wir am angeführten Orte zu beweisen versprochen hatten. Vielleicht mögte

 aber

aber jemand diesen Beweis für einen logischen Zirkel halten. Dieses wäre ungegründet. Denn aus Newtons Regel ist bewiesen worden (XIV. Hauptst. §. 4. Ex. IV.),

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta x^2 + \&c.$$

und folglich

$$(x+\Delta x)^n - x^n \text{ oder } \Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta x^2 + \&c.$$

Hieraus ist wiederum bewiesen worden (XVII. Hauptst. §. 2) daß wenn Δx sehr klein ist,

$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\mathrm{d}x$$

Nun wird aus dieser Differenziazionsregel und allem was daraus folget, bewiesen, daß

$$(x+\Delta x)^{-n} = x^{-n} - nx^{-n-1}\Delta x + \frac{-n(-n-1)}{1.\ 2}\Delta x^2 + \&c.$$

$$\text{und } (x+\Delta x)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\Delta x + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}x^{\frac{m}{n}-2}\Delta x^2 + \&c.$$

Weil der lezte Fall von dem ersten verschieden ist, so ist hier kein logischer Zirkel, als welcher nur dann Statt findet, wenn man aus der ersten Wahrheit die zweite, und aus der zweiten die erste beweisen will, ohne daß eine von beiden eine dritte Wahrheit zum Grunde habe.

Jedoch, fürchtet man sich für allen Anschein eines logischen Zirkels, so braucht man nur die Differenziazion der Potenzen aus der Differenziazion der Produkte beweisen, ohne Newtons Regel zur Hülfe zu nehmen. Es ist nemlich

$$\mathrm{d}(vxyz) = xyz\mathrm{d}v + vyz\mathrm{d}x + vxz\mathrm{d}y + vxy\mathrm{d}z$$

Sind nun v, x, y, z einander gleich, und z. E. alle $=x$, so wird

$$\mathrm{d}(xxxx) = xxx\mathrm{d}x + xxx\mathrm{d}x + xxx\mathrm{d}x + xxx\mathrm{d}x$$

oder $\mathrm{d}(x^4) = 4x^{4-1}\mathrm{d}x$ wor-

woraus sich überhaupt schließen läßt

$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

Aus dieser Formel kann nun wie im XVII Hauptstücke §. 12 geschehen, hergeleitet werden, daß

$$\mathrm{d}(x^{-n}) = -\,nx^{-n-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\,\mathrm{d}x$$

Und alle folgende Schlüsse und Formeln die darauf gebauet sind, beruhen gar nicht mehr auf Newtons Regel, folglich auch nicht die Formeln, welche wir für negative und gebrochene Potenzen binomischer Größen gefunden haben. Daß diese Formeln mit Newtons Regel übereinstimmen, kann hier als eine zufällige Sache angesehen werden.

§. 4.

Aufgabe.

Den Werth des Verhältnisses $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ finden, in dem Falle wo die Funkzion welche dieses Verhältniß ausdrücket, $\frac{0}{0}$ wird.

Vorbereitung. Es sey eine Gleichung von der $n$ten Ordnung zwischen x und y, welche diese Gestalt hat

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + yx^3 + \&c. \ldots = 0$$

So bekömmt die vollständige Differenz diese Form (XIV. Hauptst. §. 15).

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + \&c. \\ + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + e\Delta x^{n-3}\Delta x^3 + \&c. \end{array}\right\} = 0$$

läßt

läßt man die Sätze weg, wo mehr als eine Differenzial-Dimension ist, und setzet man ∂x und ∂y anstatt Δx und Δy, so behält man

$$A\partial x + B\partial y = 0$$

$$\text{oder} \;\ldots\ldots\; B\partial y = -A\partial x$$

$$\text{oder} \;\ldots\ldots\; \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{A}{B}$$

und hier sind A und B Funkzionen von x und y. Es kann geschehen, daß für gewisse Werthe von x und y beide Funkzionen A und B zugleich 0 werden, und daß man bekomme

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0}{0}$$

Dieser Ausdruck aber giebet keinen verständlichen Werth des Verhältnisses $\frac{\partial y}{\partial x}$. Folglich muß man suchen diesen Werth auf einer anderen Art zu finden. Wenn A und B null wrrden, so verschwinden $A\Delta x$ und $B\partial y$. Das Ver hältniß zwischen Δx und Δy wird alsdann noch gegeben durch diese Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + \&c. \\ + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + \&c. \end{array}\right\} = 0$$

Wenn die Differenzen sehr klein werden, so darf man nur die Sätze behalten, wo zwei Differenzial-Dimensionen vorhanden sind, und schreiben

$$C\partial x^2 + D\partial x\partial y + E\partial y^2 = 0$$

oder, nachdem man durch ∂x^2 dividiret hat

$$C + D\frac{\partial y}{\partial x} + E\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Hier siehet man, daß man eine quadratische Gleichung auflösen müste, um $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu finden. Wir wollen ferner den

Fall

Fall setzen, daß C, D und E null werden, sowohl als A und B, so ist alsdann das Verhältniß zwischen Δx und Δy gegeben durch

$$\left.\begin{array}{l} F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + K\Delta x^4 + \&c. \\ + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y + e\Delta x^{n-3}\Delta y^3 + \&c. \end{array}\right\} = 0$$

Wenn man hier nur diejenigen Sätze behält, wo drei Differenzial-Dimensionen vorhanden sind, so bekömmt man

$$F dx^3 + G dx^2 dy + H dx dy^2 + I dy^3 = 0$$

oder, nachdem man durch dx^3 dividiret hat,

$$F + G\frac{dy}{dx} + H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + I\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

Man müßte also eine Gleichung vom dritten Grade auflösen, um $\frac{dy}{dx}$ zu bekommen. Man siehet leicht ein, daß eine Gleichung vom vierten Grade aufgelöset werden müßte, wenn auch F, G, H, I, null würden. Und so immer weiter. Wollte man auf solcher Art den Werth von $\frac{dy}{dx}$ finden, so müßte man erstlich die Funkzionen A, B, C, D, E, F, G, H, I, u. s. f. haben. Und um diese Funkzionen zu erhalten, müßte man zur gegebenen Funkzion die vollständige Differenz nehmen, welches aber meistens sehr beschwerlich seyn würde. Hier kömmt uns die Rechnung mit unvollständigen Differenzen sehr zu Statten.

Man nehme die vollständige Differenz der Funkzion

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3$$

so wie sie oben (XIV. Hauptst. §. 15) gefunden worden. Man bekömmt

$$\begin{array}{ll} A\,\Delta x & =(\beta+2\delta x+\varepsilon y+3\eta x^2+2\theta xy+\iota y^2)\,\Delta x \\ +B\,\Delta y & =(\gamma+\varepsilon x+2\zeta y+\theta x^2+2\iota xy+3\varkappa y^2)\,\Delta y \\ +C\,\Delta x^2 & =(\delta+3\eta x+\theta y)\,\Delta x^2 \\ +D\,\Delta x\Delta y & =(\varepsilon+2\theta x+2\iota y)\,\Delta x\Delta y \\ +E\,\Delta y^2 & =(\zeta+\iota x+3\varkappa y)\,\Delta y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +\eta\Delta x^3 \\ +\theta\Delta x^2\Delta y \\ +\iota\Delta x\Delta y^2 \\ +\varkappa\Delta y^3 \end{array}$$

Man schreibe allenthalben dx und dy anstatt Δx und Δy. Man setze

$$A dx + B dy = 0$$

wo unter A die Funkzion $\beta+2\delta x+\varepsilon y+$ &c., und unter B die Funkzion $\gamma+\varepsilon x+2\zeta y+$ &c. verstanden wird. Man differenzire diese Gleichung, indem man dx und dy als beständig betrachtet, so wird man bekommen

$$C dx^2 + D dx dy + E dy^2 = 0$$

wo unter C verstanden wird $\delta+3\eta x+\theta y$; unter D, $\varepsilon+2\theta x+2\iota y$; unter E, $\zeta+\iota x+3\varkappa y$.

Differenziret man diese lezte Gleichung wiederum in der Voraussezung, daß dy und dx beständig sind, so bekömmt man

$$\eta dx^3 + \theta dx^2 y + \iota dx dy^2 + \varkappa dy^3 = 0$$

Mit einem Worte, in der vollständigen Differenz einer heterogenen Funkzion von x und y, wenn ihr jede homogene Funkzion von Δx und Δy oder dx und dy, die darinn enthalten ist, null machet, so entstehet jede folgende Gleichung, wenn die vorige differenziret wird, und wenn sowohl dx als dy beständig sind. Alle diese Gleichungen zwischen dx und dy, sind aber nichts anders die oben angeführten Gleichungen vom zweiten, dritten Grade, u. s. f. die man auflösen muste, um den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, im

im Falle wo dieses Verhältniß $= \frac{0}{0}$ wird. Hieraus fliesset nun folgendes Verfahren.

Auflösung. Gesetzet man hat eine Gleichung differenziret, und gefunden

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

wo A und B Funkzionen von x und y sind. Gesetzet, für einen gewissen Werth des x und des y, werde $A=0$, und $B=0$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. So fahre man fort, und differenzire immer weiter, in der Voraussetzung, daß dy und dx beständig sind. Man halte ein, so bald man für $\frac{dy}{dx}$ einen wirklichen Werth finden wird.

Exempel. Es sey gegeben diese Gleichung

$$2(y-b)^3 = 3(x-a)^3$$

so findet man anfänglich

$$2(y-b)^2\,dy = 3(x-a)^2\,dx$$

$$\text{oder}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3(x-a)^2}{2(y-b)^2}$$

Man will den Werth des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$ haben, für den Fall wo $x=a$, und $y=b$. Es ist klar, daß in diesem Falle $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Man differenzire weiter, so kömmt

$$2(y-b)\,dy^2 = 3(x-a)\,dx^2$$

$$\text{oder}\quad \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3(x-a)}{2(y-b)}$$

Dieses

Dieses giebt noch nichts, wenn $x = a$, und $y = b$. Man differenzire also zum dritten male, so hat man

$$2 dy^3 = 3 dx^3$$

$$\text{oder} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{3}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{folglich} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Zusatz. Die angeführte Methode kann auch dienen, wenn man untersuchen will, was eine gegebene Funkzion von x wird, in dem Falle, wo sie sich bei einem gewissen Werthe des x in $\frac{0}{0}$ verwandelt. Es sey gegeben diese Funkzion

$$\frac{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2}$$

In dem Falle, wo $x = 0$, wird diese Funkzion $= \frac{0}{0}$. Nichts verhindert uns anzunehmen, daß die gegebene Funkzion der Ausdruck irgend eines Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$ ist. Man setze also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2}$$

$$\text{oder} \quad x^2 dy = a dx - dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Man differenzire, und betrachte dx und dy als beständig, so kömmt

$$2x dx dy = x dx^2 (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

oder, wenn man durch $x dx$ dividiret

$$2 dy = dx (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{daher} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Wenn

Wenn nun $x = 0$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a}$$

Folglich siehet man, daß die Funkzion

$$\frac{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2} = \frac{1}{2a}$$

werden muß, wenn $x = 0$ ist. Wäre es nöthig gewesen, so hätte man müssen weiter differenziren.

§. 5.

Eine der vornehmsten Anwendungen der Differenzial-Rechnung bestehet in der Erfindung des größten oder kleinsten Werthes einer Funkzion. Wir haben schon eben (XVI. Hauptst. §. 13) kürzlich gesaget, was die äussersten Werthe einer veränderlichen Größe sind. Wir wollen es aber hier noch etwas umständlicher erklären. Es sey y eine Funkzion von x. Wenn man dem x nach und nach einen größeren Werth beileget, so wird es oft geschehen, daß die Fuukzion y entweder beständig zunimmt oder beständig abnimmt. Es kann sich aber auch treffen, daß y eine Zeitlang zunimmt und dann anfängt abzunehmen, oder daß y erstlich abnimmt und hernach zunimmt. In diesen Fällen giebt es einen Werth von y, der entweder der größte oder der kleinste von allen ist. Dieser Werth des y ist der äusserste Werth desselben, welcher also entweder ein Maximum oder ein Minimum ist. Der äusserste Werth des y wird bestimmet, indem man angiebt, wie groß x seyn muß, wenn y sein Maximum oder Minimum erreichet.

Es sey zum Exempel

$$y^2 = 2x - x^2$$

$$\text{oder} \quad y = \sqrt{(2x - x_2)}$$

Setzet

Setzet ihr $x = 1$, so wird $y = 1$. Nehmet ihr aber x größer oder kleiner als 1, zum Exempel $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{4}$, so wird y immer kleiner als 1. Nemlich y nimmt zu, so lange x unter 1 ist, und sich der 1 nähert, und fängt an abzunehmen, so bald x über 1 ist. Also ist $x = 1$ der Werth von x der das Maximum des y giebt, und weil aus $x = 1$ auch $y = 1$ entstehet, so ist $y = 1$ das Maximum des y oder der Funkzion $\sqrt{(2x - x^2)}$.

§. 6.

Wenn eine Funkzion so beschaffen ist, daß sie abnimmt, nachdem sie zugenommen hat, oder daß sie zunimmt, nachdem sie abgenommen hat, so muß ihr Differenzial null werden, in dem Augenblicke, wo sie ihr Maximum oder ihr Minimum erreichet.

So lange die Funkzion zunimmt, ist ihr Differenzial positiv; so bald sie anfängt abzunehmen, wird ihr Differenzial negativ. Oder umgekehret, die Differenz ist anfänglich negativ, so lange die Funkzion abnimmt, und wird hernach positiv, so bald die Funkzion wieder zunimmt. Es muß aber eine Größe, die aus dem Positiven ins Negative, oder aus dem Negativen ins Positive übergehet, im Augenblicke des Ueberganges null werden, weil Null die Gränzen zwischen positiven und negativen Größen ist. Folglich muß das Differenzial null seyn, wenn die Funkzion ihr Maximum oder Minimum erreichet hat.

Zum Exempel es sey wiederum

$$y = \sqrt{(2x - x^2)}$$

$$\text{so wird} \quad dy = \frac{(1 - x)dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

y erreichet sein Maximum in dem Augenblicke wo $x = 1$, und in dem nemlichen Augenblicke muß $dy = 0$ werden, welches auch in der That geschiehet. Denn in der lezten Gleichung seze man $x = 1$, so hat man

$$\partial y = \frac{(1-x)\partial x}{\sqrt{(2x-x^2)}} = 0$$

Weil nun $\partial y = 0$ im Augenblicke wo y ein Maximum oder Minimum ist, so wird auch im nemlichen Augenblicke $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Z. E. Weil

$$\partial y = \frac{(1-x)\partial x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1-x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$

und hier wird $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, wenn man 1 anstatt x schreibet. Man kann also auch sagen, daß $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ wird, wenn y ein Maximum wird.

Zusatz. Der nemliche Lehrsatz kann auch folgender Weise erkläret werden. Eine Größe nimmt zu, so lange dasjenige, was man ansetzet, größer ist, als was man abnimmt; und sie nimmt ab, wenn dasjenige was man abnimmt, größer ist, als was man zusetzet. In der Differenz einer Funkzion zeigen die positiven Sätze das zugesezte und die negativen Sätze das abgenommene an. Also nimmt die Funkzion zu, so lange als die positiven Sätze in der Differenz größer sind, als die negativen. Es sey immer

$$y = \sqrt{(2x-x^2)}$$

folglich $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(2x-x^2)}} - \frac{x\partial x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$

Es wird also y zunehmen, so lange $\frac{\partial x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$ größer seyn wird als $\frac{x\partial x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$, das ist, so lange als

$$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} > \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

oder $$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} - \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}} > 0$$

Folglich hat das Zunehmen ein Ende, so bald diese Ungleichheit nicht mehr statt findet, das ist, so bald das Positive dem Negativen gleich wird, oder sobald

$$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(2x-y^2)}}$$

oder $$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} - \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = 0$$

oder weil hier das erste Glied eben so viel ist, als dy, sobald

$$dy = 0$$

Es ist wahr, daß in dem Ausdrucke

$$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} > \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

unendlich viel Sätze fehlen, weil die Differenzen unvollständig sind. Weil aber dx so klein angenommen werden kann, als man will, so werden auch die fehlenden Sätze worinn dx^2, dx^3, u. s. f. vorkommen, so klein als man will, so daß sie die Ungleichheit nicht aufheben können. Folglich haben alle Schlüsse ihre Richtigkeit, die aus dieser Ungleichheit gezogen werden.

§. 7.

Wenn ein gewisser Werth von x das Differenzial der Funkzion null machet, so läßt sich nicht allemal daraus schließen, daß derselbe Werth des x das Maximum oder Minimum der Funkzion gebe.

Wenn man den Werth des x allmählig vergrößert, so kann es geschehen, daß y eine Zeitlang immer weniger

und

und weniger zunehme, oder beynahe sich selbst gleich bleibe, so daß dy sich immer mehr und mehr dem Nichts nähere. Folglich ist in diesem Falle dy beinahe $= 0$, oder 0 ist die Gränze von dy. Und weil die Differenzial-Gleichungen weiter nichts als Näherungen oder Gränzen ausdrücken, so wird auch in diesem Falle seyn

$$dy = 0.$$

Jedoch kann gleich darauf y wieder anfangen, bei wenigen stärker zuzunehmen, anstatt nun abzunehmen. Eben so kann eine Funkzion eine Zeitlang immer weniger abnehmen, so daß sie beinahe sich selbst gleich bleibet, hernach aber anfangen, wiederum stärker abzunehmen.

In solchen Fällen wird also $dy = 0$ oder $\frac{dy}{dx} = 0$, obgleich kein wirkliches Maximum oder Minimum Statt findet. Hieraus siehet man, daß der vorige Lehrsatz nicht allemal umgekehret werden kann, und daß das Verschwinden des Differenzials nicht ein untrügliches Kennzeichen eines äußersten Werthes ist.

§. 8.

Es sey y eine Funkzion von x. Es sey X ein gewisser Werth des x, welcher dy oder das Differenzial des y zu Null machet. Es sey Y der Werth des y, der da entstehet, wenn X anstatt x in die Funkzion gesetzet wird. So wird Y gewiß ein Maximum seyn, wenn jeder andere Werth des x, er mag größer oder kleiner seyn als X, allemal die Funkzion y kleiner machet als Y. Und Y wird gewiß ein Minimum seyn, wenn jeder andere Werth des x, er mag größer oder kleiner seyn als X, das y größer machet als Y.

Dieses ist leicht einzusehen. Wenn Y das Maximum des y ist, so muß jeder andere Werth des y kleiner seyn, als Y; ist aber Y ein Minimum, so muß jeder andere

Werth des y größer seyn. Weil nun y eine Funkzion von x ist, so entstehet das Maximum oder Minimum Y, wenn x bis zu einem gewissen Werthe X zugenommen hat. Jeder andere Werth des x giebt also nicht das Maximum oder Minimum Y, sondern entweder allemal einen kleineren oder allemal einen größeren Werth der Funkzion als Y, nemlich einen kleineren, wenn Y ein Maximum ist, und einen größeren, wenn Y ein Minimum ist.

§. 9.

Aufgabe.

Das Maximum oder Minimum einer Funkzion von x finden.

Vorbereitung. Weil zugleich y ein Maximum und $dy = 0$ wird, so muß man erstlich y, das ist die gegebene Funkzion von x differenziren, und in der herauskommenden Differenzialgleichung Null anstatt dy oder $\frac{dy}{dx}$ setzen. Dieses wird einen gewissen Werth des x geben, den wir X nennen wollen, und dieses X wird in vielen Fällen auch zugleich das Maximum oder Minimum des y geben. Zum Exempel, wenn

$$y = \sqrt{(2x - x^2)}$$

$$\text{so ist } \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

Man setze $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird

$$0 = \frac{1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

$$0 = 1 - x$$

$$x = 1 \text{ oder } X = 1$$

Sehet

Setzet man nun diesen Werth X oder x in die gegebene Funkzion $y = \sqrt{(2x - x^2)}$, so kömt

$$Y = 1$$

Dieses Y oder 1 kann also das Maximum oder Minimum des y seyn.

Wie wird man sich aber versichern, daß Y wirklich ein Maximum oder Minimum ist? Es ist schon gesaget worden, daß, wenn Y ein Maximum oder Minimum ist, jeder andere Werth des y entweder beständig größer oder beständig kleiner seyn muß, als Y (§. 8). Folglich muß in Rücksicht des Y, die Differenz Δy immer positiv, oder immer negativ werden, es mag x entweder kleiner oder größer als X angenommen werden. Es ist aber (§. 1)

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \&c.$$

Weil aber in gegenwärtigem Falle $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird

$$\Delta y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Und wenn man annimmt, daß Δx klein genug ist, um daß man die höheren Potenzen weglassen könne, so ist

$$\Delta y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

Man suche also $\frac{d^2y}{dx^2}$, welches einer Funkzion des x gleich seyn wird. Anstatt des x setze man darin den gefundenen Werth X. Findet ihr nun, daß $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine positive oder eine negative Größe ist, so ist auch

$$\Delta y \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

 entwe-

entweder positiv oder negativ, denn der Faktor $\frac{\Delta x^2}{1.2}$ kann das Zeichen nicht ändern, weil das Quadrat von $\pm \Delta x$ allemal ist $+ \Delta x^2$. Folglich, wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ eine negative Größe ist, so ist Δy allemal negativ, und Y ist ein Maximum. Wenn hingegen $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv ist, so ist Δy allemal positiv, und Y ist ein Minimum.

Wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, und folglich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$ null wird, so hat man noch

$$\Delta y = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

oder wenn Δx sehr klein ist

$$\Delta y = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3}$$

Hier mag nun $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ entweder positiv oder negativ werden, so bekömt Δy allemal zwei Werthe, nemlich einen positiven und einen negativen, und dieses wegen des Faktors Δx^3, welcher positiv oder negativ ist, nachdem man Δx positiv oder negativ annimmt. Folglich kann in diesem Falle kein Maximum oder Minimum Statt finden.

Wird aber $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ und folglich $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3}$ auch zu nichts, so kann man annehmen, wenn Δx sehr klein ist,

$$\Delta y = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}$$

Bringet man hier die nemlichen Folgerungen an, wie bei dem Satze $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$, so wird man finden, daß Δy

allemal

alemal positiv oder allemal negativ wird, man mag Δx entweder positiv oder negativ annehmen, weil in beiden Fällen Δx^4 eine positive Größe ist. Es findet also ein Maximum oder Minimum Statt, so bald nur $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ einen wirklichen Werth hat und nicht null wird.

Hingegen, wenn dieser Satz auch null wird, so nehme man an

$$\Delta y = \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} \cdot \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5}$$

Hier verändert sich das Zeichen des Δx^5, nachdem Δx positiv oder negativ ist, und Δy leidet die nemliche Veränderung des Zeichens. Also ist weder Maximum noch Minimum.

Ohne weiter zu gehen, wird man aus vorigen Bemerkungen folgende Regel ziehen können.

Auflösung. Man differenzire die gegebene Funkzion, und setze $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; so findet man einen Werth X das x, welcher das Maximum oder Minimum der Funkzion geben kann. Sollte aber diese erste Verrichtung für X einen unmöglichen oder unendlichen Werth geben, so braucht man nicht weiter zu gehen, und man siehet sogleich, daß kein Maximum oder Minimum Statt findet.

Gesetzt nun, ihr findet für X einen möglichen und endlichen Werth, so fahret fort und suchet die Sätze dieser Reihe

$$\Delta y = \frac{\partial^2 y \ldots\ldots}{\partial x^2 \ldots\ldots} + \frac{\partial^3 y \ldots\ldots}{\partial x^3 \ldots\ldots} + \frac{\partial^4 y \ldots\ldots}{\partial x^4 \ldots\ldots} + \&c.$$

ohne euch um die fehlenden Potenzen von Δx und die dazu gehörigen Divisoren in bestimmten Zahlen zu bekümmern.

 Nach-

Nachdem ihr jeden Satz ausgerechnet habet, so setzet darinn X anstatt x. Haltet ein bei dem ersten Satze der einen reellen oder wirklichen Werth, und nicht Null, für Δy giebt. Hat dieser Satz einen unpaarigen Exponenten als $\mathrm{d}x^3$, $\mathrm{d}x^5$, &c. so seyd ihr gewiß, daß die Funkzion weder Maximum noch Minimum hat. Ist aber der Exponent eine Paarzahl, als in $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}x^4$, $\mathrm{d}x^6$, u. s. f. so findet ein Maximum oder ein Minimum Statt, nachdem Δy eine negative oder positive Größe wird.

Exempel. Es sey

$$ay^2 = apx - px^2$$

oder $$y = \sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}$$

so wird $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2}\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(p - \frac{2p}{a}x\right)$$

Wird nun $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, so hat man

$$0 = \tfrac{1}{2}\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(p - \frac{2p}{a}x\right) = \frac{p - \frac{2p}{a}x}{2\sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}}$$

oder, wenn man beiderseits mit $2\sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}$ multipliziret

$$0 = p - \frac{2p}{a}x$$

daraus ziehet man

$$x = \tfrac{1}{2}a \text{ oder } X = \tfrac{1}{2}a.$$

Setzet

Setzet man diesen Werth von X in die gegebene Gleichung, so findet man

$$Y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ap}.$$

Um nun zu entdecken, ob dieser Werth von Y in der That ein Maximum oder Minimum ist, so muß man suchen $\frac{d^2y}{dx^2}$, indem man dx als beständig behandelt, und man findet für den Fall wo $x = \frac{1}{2}a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2p}{a\sqrt{ap}}$$

Da nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine wirkliche Größe ist, so braucht man nicht weiter zu differenziren. Und weil hier der Exponent in dx^2 eine Paarzahl ist, so findet ein Maximum oder Minimum Statt. Endlich da $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine negative Größe wird, so ist der äusserste Werth der Funkzion ein Maximum und nicht ein Minimum. Dieses Maximum ist also der Werth den man für Y gefunden hat, nemlich $Y = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$, und er entstehet, wenn x oder $X = \frac{1}{2}a$.

Achtzehntes Hauptstück.

Von der Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Exponenzial-Größen und Logarithmen.

§. 1.

Eine Exponenzial-Größe ist diejenige, welche einen veränderlichen Exponenten hat, als a^x. Wenn nun $a^x = y$, so siehet man, daß a als die Basis eines Logarithmen-Systems betrachtet werden kann, x stellet alle mögliche Logarithmen des Systems vor, und y die dazu gehörigen Dignitäten.

Anmerkung. Die Dignitäten in einem Logarithmen-Systeme werden auch oft Proporzional-Zahlen genannt. Die Ursach davon ist, daß sie in geometrischer Progression fortschreiten, wenn die Logarithmen selbst in arithmetischer Progression zunehmen. Z. E. Es werde nach und nach

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \&c.$$

so wird $a^x = 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ \&c.$

§. 2.

Wenn in einem Systeme die Logarithmen in arithmetischer Progression zunehmen, das ist, wenn die Differenz derselben beständig ist, so verhält sich die Differenz der Proporzionalzahl zur Differenz ihres Logarithmus, wie die Proporzional-Zahl selbst zu einer beständigen Größe, deren Werth von der Basis und der Differenz der Logarithmen abhängt.

Es sey a die Basis, und x der Logarithmus, so ist die Proporzional-Zahl a^x. Wird nun x zu $x + \Delta x$, so wird

a^x zu

a^x zu $a^{x+\Delta x}$ oder $a^x a^{\Delta x}$. Ziehet man von $a^x a^{\Delta x}$ das vorige a^x ab, so bleibet $a^x a^{\Delta x} - a^x = \Delta(a^x)$. Laßt uns setzen, es sey die Differenz der Proporzional-Zahl zur Differenz ihres Logarithmus, wie die Proporzional-Zahl zu einer unbekannten Größe m, welche entweder beständig oder veränderlich seyn mag, so hat man

$$\Delta(a^x),\ \Delta x :: a^x,\ m$$

oder $(a^x a^{\Delta x} - a^x),\ \Delta x :: a^x,\ m = \dfrac{a^x \Delta x}{a^x a^{\Delta x} - a^x} = \dfrac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$

Es ist also die Zahl $m = \dfrac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$. Folglich wenn Δx beständig ist, so ist m auch eine beständige Größe. Es sey $a = 10$; und $\Delta x = 1$, so wird x nach und nach

$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$ &c.
$a^x = 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ 100000,\ 1000000,$ &c.

Hier muß sich also die Differenz zwischen jeder Proporzionalzahl und der vorigen verhalten zur vorigen, wie 1 oder Δx zu $\frac{1}{9}$. Man nehme z. E. die Proporzionalzahlen 10000 und 100000, so ist ihre Differenz 90000, und es wird

$$90000,\ 1 :: 10000,\ \tfrac{1}{9}$$

Man nehme die Proporzionalzahlen 100 und 1000, so ist ihre Differenz 900; und es wird

$$900,\ 1 :: 100,\ \tfrac{1}{9}$$

Gesetzet x nimmt beständig um $\frac{1}{10}$ zu, so entstehen folgende Progressionen, wenn $a = 10$,

$x = 0,\ \frac{1}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{10},$ &c.
$a^x = 1,\ 10^{\frac{1}{10}},\ 10^{\frac{2}{10}},\ 10^{\frac{3}{10}},\ 10^{\frac{4}{10}},\ 10^{\frac{5}{10}},\ 10^{\frac{6}{10}},$ &c.

oder

$a^x = 1,\ \sqrt[10]{10},\ \sqrt[10]{10^2},\ \sqrt[10]{10^3},\ \sqrt[10]{10^4},\ \sqrt[10]{10^5},\ \sqrt[10]{10^6},$ &c.

Hier ist $\Delta x = \frac{1}{10}$, folglich

$$\frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{(\frac{1}{10})}{10^{\frac{1}{10}} - 1} = \frac{1}{10^{\frac{11}{10}} - 10} = \frac{1}{\sqrt[10]{10^{11}} - 10}$$

Man nehme die Sätze $10^{\frac{4}{10}}$ und $10^{\frac{5}{10}}$, so ist ihre Differenz $10^{\frac{5}{10}} - 10^{\frac{4}{10}}$, und

$$(10^{\frac{5}{10}} - 10^{\frac{4}{10}}),\ \tfrac{1}{10} :: 10^{\frac{4}{10}},\ m$$

oder $(10^{\frac{4}{10}} 10^{\frac{1}{10}} - 10^{\frac{4}{10}}),\ \frac{1}{10} :: 10^{\frac{4}{10}},\ m$

oder $10^{\frac{4}{10}}(10^{\frac{1}{10}} - 1),\ \frac{1}{10} :: 10^{\frac{4}{10}},\ m$

oder $10^{\frac{1}{10}} - 1,\ \frac{1}{10} :: 1,\ m = \frac{(\frac{1}{10})}{10^{\frac{1}{10}} - 1} =$ &c.

§. 3.

Es sey $a^x = y$, so ist, wie wir jezt gesehen haben,

$$\Delta(a^x),\ \Delta x :: a^x,\ m = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$$

oder $\Delta y,\ \Delta x :: y,\ m = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$

folglich $\Delta y = \frac{y \Delta x}{m}$

Gesetzet also, es ist Δx bestimmet und beständig, und m ist einmal bekannt, so kann allemal Δy, das ist die Zunahme der Proporzional-Zahl bestimmet werden.

Diese beständige Größe m verändert sich aber im nemlichen Systeme, nachdem Δx größer oder kleiner angenommen wird. Z. E. Es sey $a = 10$ und $\Delta x = 3$, so ist

$$m = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{3}{10^3 - 1} = \frac{3}{1000 - 1} = \frac{3}{999} = \frac{1}{333}$$

Es sey $\Delta x = 2$, so wird

$$\frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{2}{10^2 - 1} = \frac{2}{100 - 1} = \frac{2}{99}$$

Es sey $\Delta x = 1$, so wird

$$\frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{1}{10^1 - 1} = \frac{1}{9}$$

Je kleiner also Δx wird, desto größer wird m. Es kann aber diese Vergrößerung des m doch nicht ins Unendliche gehen. Denn gesetzet es würde Δx so klein, daß man es für o halten könnte, so würde alsdenn

$$m = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{0}{a^0 - 1} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Es würde also in diesem Falle

beinahe $m = \frac{0}{0}$

Dieser Ausdrck $\frac{0}{0}$ zeiget aber keinesweges eine unendliche Größe an, sondern er hat einen bestimmten Werth, wie wir oben gesehen haben (XVII. Hauptst. §. 4).

Daher muß man schließen, daß $m = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$, so klein man auch Δx annehmen mag, nicht einen gewissen bestimmten Werth überschreiten kann, den wir durch k ausdrücken wollen. Wenn also Δx und folglich auch Δy sehr klein werden, so nähert sich m je mehr und mehr dem Werthe k, und weil

$$\Delta y = \frac{y \Delta x}{m}$$

so wird beinahe $dy = \frac{y dx}{k}$

oder $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{k}$

Wie

Wie diese Größe k, welche die Gränze von $\frac{\mathrm{d}x}{a^{\mathrm{d}x}-1}$ ist, bestimmet werden kann, wird bald gelehret werden. Hier ist es genug, daß man wisse, daß sie bei jedem Systeme wirklich vorhanden ist.

§. 4.

Die Größe k, wovon im vorigen Paragraph gesprochen worden, ist in jedem Systeme beständig, aber in verschiedenen Systemen hat sie verschiedene Werthe, weil diese Werthe von der Basis a abhängen. Einige nennen sie den Modulus des Systemes, andere bloß die beständige Größe des Systemes, noch andere, aus geometrischen Gründen, die Subtangente des Systemes.

§. 5.

In zwei verschiedenen Systemen verhalten sich die Logarithmen der nemlichen Proporzional-Zahl, wie die Subtangenten der Systeme.

Es sey in einem Systeme x der Logarithmus von y, und $x+\Delta x$ der Logarithmus von $y+\Delta y$. Es sey in einem anderen Systeme z der Logarithmus der nemlichen Zahl y, und $z+\Delta z$ der Logarithmus von $y+\Delta y$. Es ist am gehörigen Orte bewiesen worden (VI. Hauptst. §. 24 Zusatz) daß die Logarithmen der nemlichen Zahlen in zwei verschiedenen Systemen eine beständige Razion oder ein beständiges Verhältniß unter sich haben. Folglich wird seyn

$$x, z :: (x+\Delta x), (z+\Delta z)$$

oder $(x+\Delta x), x :: (z+\Delta z), z$

daher ist $\Delta x, (x+\Delta x) :: \Delta z, (z+\Delta z)$ (IX. Hauptst. §. 16)

oder $\Delta x, \Delta z :: (x+\Delta x), (z+\Delta z)$

Es

Es sey nun im ersten Systeme

$$\Delta y = \frac{y \Delta x}{m}$$

und im anderen

$$\Delta y = \frac{y \Delta z}{n}$$

so folget $\frac{y \Delta x}{m} = \frac{y \Delta z}{n}$

oder $\frac{\Delta x}{m} = \frac{\Delta z}{n}$

oder $\Delta x, \Delta z :: m, n$

Da nun gefunden worden

$$\Delta x, \Delta z :: (x + \Delta x), (z + \Delta z)$$

so ist $(x + \Delta x), (z + \Delta z) :: m, n$

oder $\frac{x + \Delta x}{z + \Delta z} = \frac{m}{n}$

Nun nehme man an, daß Δx und Δz immer kleiner und kleiner werden, so nähern sich die Größen m und n ihren Gränzen. Diese Gränzen werden nicht erreichet so lange Δx und Δz noch einen wirklichen Werth haben, sondern nur wenn sie verschwinden. Gesetzet also die Gränze von m oder die Subtangente des ersten Systemes sey k, und die Gränze von n oder die Subtangente des zweiten Systemes sey q, so werden zugleich Δx zu 0, Δy zu 0, m zu k und n zu q, folglich

$$\frac{x}{z} = \frac{k}{q}$$

oder $x, z :: k, q$

Das

Das ist, es verhalten sich die Logarithmen x und z der Zahl y in zwei verschiedenen Systemen, wie k und q, die Subtangenten beider Systeme.

§. 6.

Aufgabe.

Es seyen die Subtangenten zweier Systeme, und der Logarithmus einer Zahl in dem einem Systeme gegeben: man soll den Logarithmus der nemlichen Zahl in dem anderen Systeme finden.

Auflösung. Wie sich die Subtangente des ersten Systemes zur Subtangente des anderen Systemes verhält, so verhält sich der Logarithmus aus dem ersten Systeme, zum Logarithmus der nemlichen Zahl aus dem zweiten Systeme.

Anmerkung. Es seyen die beiden Subtangenten μ und μ', die beiden Logarithmen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, so ist

$$\mu, \mu' :: \mathfrak{L}, \mathfrak{L}' = \frac{\mu'}{\mu}\mathfrak{L}$$

Man darf also nur jeden Logarithmus $\mathfrak{L}$ des ersten Systemes mit $\frac{\mu'}{\mu}$ multipliziren, um die Logarithmen der nemlichen Zahlen im anderen Systeme zu bekommen.

§. 7.

Um die Berechnung der Logarithmen zu erleichtern, pfleget man ein System anzunehmen, dessen Subtangente 1 ist, und die dazu gehörigen Logarithmen heißen natürliche Logarithmen, weil 1 als die einfacheste Zahl angesehen wird. Man nennet sie auch hyperbolische Logarithmen, aus geometrischen Gründen. Setzet man nun voraus, daß die hyperbolischen Logarithmen bekannt und berech-

berechnet sind, so kann man leicht jedes andere System berechnen. Denn es ist, vermöge des vorigen Paragraphs,

$$\mathfrak{L}' = \frac{\mu'}{\mu}\mathfrak{L}$$

ist nun $\mathfrak{L}$ der natürliche Logarithmus einer Zahl, so ist $\mu = 1$, und es wird

$$\mathfrak{L}' = \mu'\mathfrak{L}$$

woraus man siehet, daß man nur die natürlichen Logarithmen durch die Subtangente μ' irgend eines Systemes zu multipliziren brauchet, um die Logarithmen dieses Systemes zu bekommen.

Die Basis des natürlichen Logarithmen-Systemes wird oft durch den Buchstaben e ausgedrücket, so daß e^x alle mögliche Proporzional-Zahlen oder Dignitäten in dem natürlichen Systeme vorstellet. Es wird bald gezeiget werden, daß dieses e so viel ausmachet, als 2;7182818.....

Da wir in diesem Hauptstücke noch viel von Logarithmen zu sprechen haben, so wollen wir, der Kürze halben, den natürlichen Logarithmus einer Zahl allemal durch l, und jeden anderen Logarithmus durch $\mathfrak{L}$ ausdrücken. Es soll also ly allemal den natürlichen Logarithmus von y bedeuten, und $\mathfrak{L}y$, den Logarithmus von y in einem anderen Systeme.

§. 8.

Aufgabe.

Exponenzialgrößen und Logarithmen differenziren.

Auflösung.

Wenn $y = a^x$

so ist $dy = \frac{y dx}{\mu} = \frac{a^x dx}{\mu}$

Wenn

$$\text{Wenn} \quad x = \mathfrak{L}y$$

$$\text{so ist } dx = \frac{\mu dy}{y}$$

Die erste dieser Formeln ist schon oben bewiesen worden (§. 3), und die zweite wird daraus gefolgert. Der Buchstabe μ bedeutet die Subtangente des Systemes. Wenn von dem natürlichen Systeme die Rede ist, so wird die Basis $a = e$, und die Subtangente $\mu = 1$. Also

$$\text{Wenn} \quad y = e^x$$

$$\text{so ist } dy = y dx = e^x dx$$

$$\text{Wenn} \quad x = ly$$

$$\text{so ist } dx = \frac{dy}{y}$$

und diese lezten Formeln, die sich auf das natürliche Logarithmen-System beziehen, sind die gebräuchlichsten. Anstatt x und y kann jede Funkzion veränderlicher Größen gesetzet werden. Die Formeln müssen allemal gelten. Zum Exempel

$$\text{Es sey} \quad y = e^{nx - x^2}$$

$$\text{so ist } dy = e^{nx - x^2} d(nx - x^2)$$

$$= e^{nx - x^2} (n - 2x) dx$$

$$\text{Es sey} \quad y = l[x + \sqrt{(a^2 + x^2)}]$$

$$\text{so ist } dy = \frac{d[x + \sqrt{(a^2 + x^2)}]}{x + \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

oder wenn man diesen Ausdruck gehörig entwickelt

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

Zusatz. Die angegebenen Formeln können folgendermaßen in Worten ausgedrücket werden.

1) Das

1) Das Differenzial einer Proporzional-Zahl im natürlichen Systeme, ist gleich dem Produkte aus der Zahl selbst und dem Differenziale ihres Logarithmus.

2) Das Differenzial des Logarithmus im natürlichen Systeme ist gleich dem Differenziale der Proporzional-Zahl, wenn es durch die Proporzional-Zahl selbst dividiret wird.

§. 9.

Aufgabe.

Den natürlichen Logarithmus von $1+x$ finden.

Vorbereitung. Es sey

$$y = l(1+z)$$

so bekömmt man, wenn z um Δz zunimmt, und y zu Y wird, (XVII. Hauptst. §. 2),

$$Y = y + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dz^3} \cdot \frac{\Delta z^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dz^4} \cdot \frac{\Delta z^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Wenn man nach und nach differenziret, und dx als beständig betrachtet, so findet man folgende Werthe:

$$y = l(1+z)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1+z}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{-1}{(1+z)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} = \frac{2}{(1+z)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dz^4} = \frac{-6}{(1+z)^4} \quad \&c. \ \&c.$$

Setzet man diese Werthe in der obigen Reihe, und auch anstatt Y und y ihre Werthe, so ist

$$l(1+z+\Delta z) = l(1+z) + \frac{1}{1+z} \cdot \frac{\Delta z}{1} - \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{1.2} + \frac{1.\ 2}{(1+z)^3} \cdot \frac{\Delta z^3}{1.2.3} - \frac{1.\ 2.\ 3}{(1+z)^4} \cdot \frac{\Delta z^4}{1.2.3.4} \quad \&c. \quad \&c.$$

Wir wollen nun annehmen, es werde $z=0$, so bekömt man

$$l(1+\Delta z) = l1 + \frac{\Delta z}{1} - \frac{\Delta z^2}{2} + \frac{\Delta z^3}{3} - \frac{\Delta z^4}{4} + \&c.$$

aber in jedem Systeme und folglich auch im natürlichen ist $l1=0$; denn $e^0=1$, folglich $l1=0$. Also

$$l(1+\Delta z) = \Delta z - \frac{\Delta z^2}{2} + \frac{\Delta z^3}{3} - \frac{\Delta z^4}{4} + \&c.$$

Es kann aber Δz jede Größe vorstellen, und nichts hindert, daß wir x anstatt Δz schreiben. Wenn dieses geschiehet, so bekommen wir folgende Formel.

Auflösung. Es ist

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \&c.$$

Zusatz I. Wenn man annimt $1+x=q$, so wird $x=q-1$, und

$$lq=(q-1)-\frac{(q-1)^2}{2}+\frac{(q-1)^3}{3}-\frac{(q-1)^4}{4}+\&c.$$

Zusatz II. Wenn man in der gefundenen Formel, welche $l(1+x)$ ausdrücket, x negativ annimmt, und allenthalben $-x$ anstatt $+x$ setzet, so kömt

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\&c.$$

Man subtrahire $l(1-x)$ von $l(1+x)$, nemlich

$$\text{Von } l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\&c.$$

$$\text{subtr. } l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\&c.$$

$$\text{bleib. } l(1+x)-l(1-x)=2x\ldots\ldots+\frac{2x^3}{3}\ldots\ldots+\frac{2x^5}{5}\ldots\&c.$$

Es ist aber $l(1+x)-l(1-x)=l\frac{1+x}{1-x}$, also wird

$$l\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\&c.\right)$$

Es werde nun der natürliche Logarithmus einer Zahl n verlanget, so nehme man an

$$n=\frac{1+x}{1-x}$$

daher $n-nx=1+x$

$n-1=nx+x$

$n-1=(n+1)x$

$$\frac{n-1}{n+1}=x$$

Man setze also in der lezten Formel n anstatt $\frac{1+x}{1-x}$, und $\frac{n-1}{n+1}$ anstatt x, so kömt

$$ln=2\left[\frac{n-1}{n+1}+\frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3}+\frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5}+\frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7}+\&c.\right]$$

Weil diese Reihe sehr geschwinde abnimmt, so ist sie in der Ausübung sehr bequem. Gesetzt, es soll der natürliche Logarithmus von 10 gefunden werden, so ist

$$l10=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+\&c.\right)$$

Wenn man alle Sätze in Dezimalbrüchen ausdrücket, so findet man

$$l10=2;3025850\ldots\ldots$$

§. 10.

Aufgabe.

Den Logarithmus einer Zahl in jedem Systeme finden.

Auflösung. Wie 1, als die Subtangente des natürlichen Systems, sich verhält zur Subtangente m eines anderen Systemes; so verhält sich der natürliche Logarithmus einer Zahl zu ihrem Logarithmus im anderen Systeme (§. 6), also

$$1, m :: ln, \mathfrak{L}n$$

oder $$\mathfrak{L}n = mln$$

und $$\frac{\mathfrak{L}n}{ln}=m$$

Wenn man also den Logarithmus irgend einer Zahl n im natürlichen Systeme, und auch im anderen Systeme kennet, so findet man die Subtangente m. Es ist am bequemsten,

quemsten, wenn man anstatt n die Basis des andern Systemes nimmt, alsdenn ist $\mathfrak{L}n$ allemal $=1$. Denn weil $n^1=n$, so ist $\mathfrak{L}n=1$. Folglich bekömt man

$$\frac{1}{\mathrm{l}n}=m$$

Hier läßt sich $\mathrm{l}n$ aus voriger Aufgabe finden. Hat man nun die Subtangente m des anderen Systemes gefunden, so darf man nur die natürlichen Logarithmen mit m multipliziren, um die Logarithmen der nemlichen Zahlen im anderen Systeme zu bekommen. Denn $\mathfrak{L}n=m\,\mathrm{l}n$.

Exempel. In der gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln ist die Basis 10, und folglich $\mathfrak{L}\,10=1$. Der natürliche Logarithmus von 10 ist gefunden worden 2;3025850.... Setzet man diese Werthe in die Formel

$$m=\frac{\mathfrak{L}n}{\mathrm{l}\,n}$$

so wird $m=\dfrac{1}{2;3025850\ldots}$

oder $m=0;4342944\ldots\ldots$

Dieses ist also der Modulus oder die Subtangente des Systemes der Tafel-Logarithmen; und mit diesem Modulus muß jeder natürliche Logarithmus multipliziret werden, wenn man den Tafel-Logarithmus derselbigen Zahl erhalten will.

Es sey verlanget der Tafel-Logarithmus der Zahl 17, so ist

$$\mathrm{l}\,17=2\left(\frac{16}{18}+\frac{16^3}{3\cdot18^3}+\frac{16^5}{5\cdot18^5}+\frac{16^7}{7\cdot18^7}+\&c.\right)$$

oder, weil $\dfrac{16}{18}=\dfrac{8}{9}$, und $\dfrac{16^n}{18^n}=\left(\dfrac{16}{18}\right)^n=\left(\dfrac{8}{9}\right)^n=\dfrac{8^n}{9^n}$

so ist $\mathrm{l}\,17=2\left(\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^3}{3\cdot9^3}+\dfrac{8^5}{5\cdot9^5}+\dfrac{8^7}{7\cdot9^7}+\&c.\right)$

Multipliziret man nun die Reihe mit dem Modulus 0;4342944...., so erhält man

$$\mathfrak{L}\,17 = 2 \times 0;4342944\ldots\left(\frac{8}{9} + \frac{8^3}{3 \cdot 9^3} + \frac{8^5}{5 \cdot 9^5} + \&c.\right)$$

oder $\mathfrak{L}\,17 = 0;8685888\ldots\left(\frac{8}{9} + \frac{8^3}{3 \cdot 9^3} + \frac{8^5}{5 \cdot 9^5} + \&c.\right)$

Entwickelt man nun alles in Dezimalbrüchen, so wird

$$\mathfrak{L}\,17 = 1;2304489\ldots..$$

§. 11.

Aufgabe.

In jedem Systeme die Proporzionalzahl finden, die zu einem Logarithmus gehöret.

Vorbereitung. Es sey m der Modulus eines Systemes, und in diesem Systeme sey

$$u = \mathfrak{L}(1 + z)$$

so ist vermöge der vorigen Paragraphen

$$u \text{ oder } \mathfrak{L}(1 + z) = m\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \&c.\right)$$

folglich $\frac{u}{m} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \&c.$

Man nehme nun an es sey

$$z = Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + Eu^5 + \&c.$$

und verwandele z in eine Funkzion von u, wie am gehörigen Orten (XIII. Hauptst. §. 27) gelehret worden. So wird man bekommen

$$z = \frac{u}{m} + \frac{u^2}{2m^2} + \frac{u^3}{6m^3} + \frac{u^4}{24m^4} + \frac{u^5}{120m^5} + \&c.$$

oder

oder $z = \frac{u}{1.m} + \frac{u^2}{1.2.m^2} + \frac{u^3}{1.2.3.m^3} + \frac{u^4}{1.2.3.4.m^4} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5.m^5}$
$+$ &c.

folgl. $z+1 = 1 + \frac{u}{m} + \frac{u^2}{1.2.m^2} + \frac{u^3}{1.2.3\,m^3} + \frac{u^4}{1.2.3.4.m^4} +$ &c.

Weil nun $u = \mathfrak{L}(1+z)$, so ist $1+z$ die Zahl, deren Logarithmus u ist.

Auflösung. Laßt uns die Proporzionalzahl, die zum Logarithmus u gehöret, durch $\mathfrak{N}u$ ausdrücken, so wird

$$\mathfrak{N}u = 1 + \frac{u}{1.m} + \frac{u^2}{1.2.m^2} + \frac{u^3}{1.2.3.m^3} + \frac{u^4}{1.2.3.4.m^4} + \text{\&c.}$$

Im natürlichen Systeme ist $m = 1$. Wenn wir also die Zahl, deren natürlicher Logarithmus u ist, durch $\mathrm{n}u$ ausdrücken, so wird

$$\mathrm{n}u = 1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{\&c.}$$

Zusatz I. Weil die Sätze in der gefundenen Reihe zunehmend sind, so scheinet die Reihe von geringem Nutzen zu seyn. Jedoch dienet sie, um die Basis des natürlichen Systemes zu finden. Denn in jedem Systeme ist die Basis diejenige Proporzionalzahl, deren Logarithmus 1 ist. Setzet man also 1 anstatt u in der lezten Formel, so wird

$$\mathrm{n}1 = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \text{\&c.}$$

Berechnet man diese Reihe in Dezimalbrüchen, so entstehet

$$e = 2;7182818\ldots\ldots$$

und dieses ist die Zahl, welcher wir schon mehr als einmal erwähnet haben. (VI. Hauptst. §. 19).

Zusatz II. Die nemliche Reihe, welche in der Auflösung angegeben worden, kann auch dienen, um Exponenzialgrößen durch unendliche Reihen auszudrücken.

Es sey gegeben e^x, so ist dieses die Zahl, welche im natürlichen Systeme zum Logarithmus x gehöret, oder $e^x = \mathfrak{n}x$, es ist aber, vermöge der gefundenen Formel,

$$\mathfrak{n}x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

also $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Gesezt, es soll a^z durch eine unendliche Reihe ausgedrücket werden, so setze man

$$a^z = e^x$$

so wird, wenn man beide Glieder auf ein System beziehet

$$z\mathfrak{L}a = x\mathfrak{L}e$$

und wenn man das natürliche System nimmt, so ist $\mathfrak{L}e$ oder $le = 1$, folglich

$$z\,la = x$$

folglich wird $a^z = e^{z\,la}$. Es ist aber

$$e^{z\,la} = 1 + \frac{z\,la}{1} + \frac{z^2(la)^2}{1.\ 2} + \frac{z^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.$$

also auch

$$a^z = 1 + z\,la + \frac{z^2(la)^2}{1.\ 2} + \frac{z^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{z^4(la)^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

wo unter la allemal der natürliche Logarithmus des a verstanden wird.

§. 12.

Aufgabe.

Wenn der Logarithmus um eine gewisse Quantität zunimmt, so soll gefunden werden, um wieviel die Proporzionalzahl zunehmen muß.

Vorbereitung. Es sey a die Basis dds Systemes, so ist a^x die zu x gehörige Proporzionalzahl, und $a^{x+\Delta x}$ ist

ist die Proporzionalzahl, welche zum Logarithmus $x+\Delta x$ gehöret. Es soll nun gefunden werden

$$a^{x+\Delta x} - a^x$$

oder $a^x a^{\Delta x} - a^x$

oder $a^x(a^{\Delta x} - 1)$

Es ist aber, vermöge des vorigen Paragraphs,

$$a^{\Delta x} = 1 + \Delta x la + \frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{\Delta x^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

folglich

$$a^{\Delta x} - 1 = \Delta x la + \frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{\Delta x^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$\text{folgl.}\ a^x(a^{\Delta x} - 1) = a^x\left(\Delta x la + \frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$

Auflösung. Es sey $y = a^x$ und $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$ das ist, y sey die Proporzionalzahl, die zum Logarithmus x gehöret, in einem Systeme dessen Basis a ist, so wird

$$\Delta y = y\,\Delta x la + \left(\frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$

wo unter la der natürliche Logarithmus von a verstanden wird. Wird Δx negativ angenommen, so ist

$$\Delta y = y\left(-\Delta x la + \frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.\ 2} - \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$

folglich ist überhaupt

$$\Delta y = y\left(\pm \Delta x la + \frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.\ 2} \pm \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$

Im natürlichen Systeme wird die Basis $a = e$, und $la = le = 1$. Also ist in diesem Systeme

$$\Delta y = y\left(\pm \Delta x + \frac{\Delta x^2}{1.2} \pm \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \pm \&c.\right)$$

§. 13.

Aufgabe.

Wenn die Proporzional-Zahl um ein Gewisses zunimmt, so soll man finden, um wie viel der Logarithmus zunehmen muß.

Auflösung. Es sey $z = \mathfrak{L}x$. Man soll finden Δz oder $\mathfrak{L}(x + \Delta x) - \mathfrak{L}x$. Hier ist

$$\Delta z = \mathfrak{L}(x + \Delta x) - \mathfrak{L}x = \mathfrak{L}\frac{x + \Delta x}{x} = \mathfrak{L}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Es ist aber (§. 9 und 10)

$$\Delta z \text{ oder } \mathfrak{L}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = m\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} + \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} + \&c\right)$$

wo m den Modulus oder die Subtangente des Systemes vorstellet. Weil Δx positiv und negativ seyn kann, so hat man überhaupt

$$\Delta z \text{ oder } \Delta(\mathfrak{L}x) = m\left(\pm\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} \pm \&c.\right)$$

Im natürlichen Systeme wird $m = 1$, folglich

$$\Delta(lx) = \pm\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} \pm \&c.$$

§. 14.

Die beiden lezten Aufgaben haben einen besonderen Nutzen im Gebrauche der gewöhnlichen oder Briggischen Logarithmentafeln. Deswegen wollen wir uns bei der Anwendung derselben noch etwas aufhalten.

Vorher aber müssen wir von der verkürzten Multiplikazion der Dezimalbrüche sprechen, als welche bei etwas weitläufigen Rechnungen die Arbeit allemal sehr befördert.

Wenn

Wenn Zahlen mit Dezimalbrüchen multipliziret werden sollen, und wenn bei jedem Faktor die ganze Zahl nur aus einer Ziffer bestehet, so schreibe man beide Faktoren unter einander, so daß die Dezimalzeichen auch unter einander zu stehen kommen. Man multiplizire von der linken Hand zur rechten, und schreibe die Zehner der einzelnen Produkte unter den vorhergehenden Produkten, anstatt daß mann sonst dieselben im Sinne zu behalten pfleget. Man gehe in jeder Reihe nicht weiter als bis zur Kolumne, wo die Factoren rechter Hand aufhören. Man mache, wie gewöhnlich die Aggregate der Kolumnen von der rechten Hand zur linken. Bei der ersten Kolumne rechter Hand kann man, wegen der fehlenden Kolumnen, so viel Einheiten zusetzen als gedachte erste Kolumne Zehner enthält. In dem ganzen Produkte setze man das Dezinalzeichen gerade unter den Dezinalzeichen der Faktoren. Zum Exempel, es werde verlanget 9; 760543 × 4; 356714. So verfahre man folgendermaßen

```
 9;760543
 4;356714
---------
36840062
 2202110
 2718052
  210110
  455005
   33022
   54260
    4303
    6392
     440
      97
      36
       2
---------
42;523894
```

Hier

Hier bedeuten die kleinen Ziffern die Zehner, welche sonst in Sinne behalten werden. Die lezte kleine Ziffer zur rechten gehöret zum Folgenden Produkte welches ausgelaßen worden. Z. E. In beiden lezten Zeilen hat man gesaget; 4 mal 9 ist 36, welche 36 mit gewöhnlichen Ziffern aufgeschrieben worden. Darauf sollte folgen, 4 mal 7 ist 28, von diesen beiden Ziffern ist nur die 2 beibehalten und klein unter 6 geschrieben worden. Bei der ersten Kolumne zur Rechten war das Aggregat 31. Weil hier 3 Zehner sind, so hat man noch 3 Einheiten zugesezet, und 34 bekommen. Denn man kann annehmen, daß die fehlende Kolumne zur Rechten eben so viel Zehner enthält, als die erste aufgeschriebene, welche Zehner also hier als Einheiten mitgerechnet werden müssen. Sollte hierdurch ein Irrthum entstehen, so kann er doch nicht viel betragen, und höchstens wird er auf die beiden lezten Dezimalziffern einen Einfluß haben. Wenn man also dergleichen Rechnungen mit sechs Dezimal-Ziffern verrichtet, so sind wenigstens die vier ersten im Resultate richtig. Rechnet man mit 8 Dezimalziffern, so sind wenigstens sechs zuverläßig.

Wenn die Faktoren Zehner, Hunderte, u. s. f. enthalten, so verrichte man die Multiplikazion, als wenn die ersten Ziffern linker Hand nur bloße Einheiten wären. Wenn das Produkt gefunden ist, so merke man die Stelle des Dezimalzeichens in dem einen Faktor. Man gehe aber noch weiter zur rechten, um so viel Stellen als ganze Ziffern im anderen Faktor sind, weniger 1. So bekömmt man die Stelle oder die Kolumne, wo im Produkte das Dezimalzeichen stehen soll. Es werde verlanget

17357;246853 × 354;276815

17357;2468 53
354;2768 15
――――――――――
319 5162 8459
8012011 2100
5555500005
3123123421
48208864 2
2122012 3 2
24604482
10110011
7915948
4234124
628022
413412
86406
52451
1735
555
312
――――――――――
6149270;2322

Hier stehet das Dezimalzeichen im Multiplikandum, zwischen 7 und 2. Weil aber im Multiplikator die ganze Zahl aus 3 Ziffern bestehet, so gehe man um 3 — 1 oder 2 Stellen weiter zur Rechten, nemlich bis zum Raume zwischen 4 und 6 im Multiplikandum. Von dort gehe man gerade herunter, so fällt das Dezimalzeichen im Produkte zischen 0 und 2. Denn gesetzet, die erste Ziffer 3 im Multiplikator stellete bloße Einheiten vor, so würden aus den Einheiten, Zehnern, Hunderten, Zehntheilen, Hunderttheilen, u. s. f., wiederum im Produkte Einheiten, Zehner, Hunderte, Zehntheile, Hunderttheile, u. s. f. entstehen. Folglich bliebe das Dezimalzeichen, wo es sich im Multiplikandum befindet. Weil aber Hunderte im Multiplikator sind, so wird alles hundertmal größer, welches auch geschiehet, wenn das Dezimalzeichen um zwei Stellen weiter zur Rechten gerücket wird.

Sind in einem Faktor oder in beiden, Nullen linker Hand, so ist das Verfahren im Grunde das nemliche, nur fanget man die Multiplikazion bei den ersten geltenden Ziffern des Multiplikators an, um überflüßige Nullen zu ersparen. Die Nullen des Multiplikandums aber muß man eine nach der anderen multipliziren, um sich in der Ordnung der einzelnen Produkte nicht zu verirren. Es sey zu multipliziren 0;007654 mit 0;053842.

```
0;007654
0;053842
--------
   00050
     332
    0001
      21
     000
       5
--------
0;000409
```

Es sey zu multipliziren 253;004796 mit 0;023765

```
253;004796
  0;023765
----------
   4060084
   1000011
    659002
    100012
    145100
     32002
     12080
      3100
      1055
       210
----------
  6;012657
```

Hier bleibet im Produkte das Dezimalzeichen an der nemlichen Stelle, wo es im Multiplikandum war. Denn im Multiplikator ist nur eine ganze Ziffer, nemlich 0. Also muß das Zeichen um 1—1, das ist, um keine Stelle weiter zur Rechten gerücket werden.

Es soll multipliziret werden 0;0000497 mit 234.

```
   234;00000
     0;0000497
   -----------
         826
         110
         187
          23
          14
           2
   -----------
     0;01164
```

Hier hätte man auch nach der gewöhnlichen Art 0;0000497 mit 234 multipliziren können

```
     0;0000497
           234
   -----------
          1988
         1491
         994
   -----------
     0;0116298
```

Das Produkt wird hier etwas kleiner. Wenn aber vorausgesetzet wird, daß der Bruch 0;0000497 nur eine Näherung ist, und daß noch unendlich viel Dezimalbrüche fehlen, so ist dieses letzgefundene Produkt zu klein. Denn laßt uns setzen, der wahre Bruch sey 0;0000497555, so müste das Produkt größer werden um diese 0,0000000555 × 234,

```
        0;0000000555
                 234  mult.
        ------------
                2220
               1665
              1110
        ------------
        0;0000129870
addire  0;0116298
        ------------
        0;0116427870, wahres Produkt.
```

Man

Man siehet also, daß das Produkt, welches durch die abgekürzte Multiplikazion gefunden worden, im Falle der unvollständigen Brüche, dem wahren am nächsten kömmt.

Uebrigens wird bei der verkürzten Multiplikazion diese Unvollständigkeit der Brüche allemal vorausgesetzet. Sind die Brüche vollständig, so daß nichts daran fehlet, so muß man bei der gewöhnlichen Multiplikazion bleiben. Dieser Fall ist aber selten.

§. 15.

Aufgabe.

Die Proporzionalzahl finden, welche zu einem Logarithmus gehöret, der nicht genau in den Tafeln anzutreffen ist.

Auflösung. Man suche in der Tafel den nächst kleineren Logarithmus und nenne ihn x, die dazu gehörige Zahl nenne man y. Man subtrahire x von dem gegebenen Logarithmus, so bleibet Δx. Man erinnere sich, daß $la = l10 = 2;302585$ (§. 9).

Man suche Δy nach der Formel (§. 12).

$$\Delta y = y\left(\Delta x\, la + \frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.\ 2} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.\right)$$

oder $\Delta y = y\,\Delta x\, la + \frac{1}{2} y \Delta x^2 la^2 + \frac{1}{6} y \Delta x^3 la^3 + \&c.$

Wenn Δy gefunden worden, so addire man Δy zu y. Die Summe ist die verlangete Proporzionalzahl.

Exempel I. Es wird verlanget die Proporzionalzahl, welche zum Logarithmus 1;798654 gehöret. Hier findet

findet man in der Tafel 1;792392 = L62. Nun verfahre man also:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Von} & 1;798654 & \\
\text{subtrahire} & 1;792392 & = x \\
\hline
 & 0;006262 & = \Delta x \\
\text{multipl.} & 2;302585 & = la \\
\hline
 & 0002424 & \\
 & 10100 & \\
 & 000868 & \\
 & 1010 & \\
 & 0002 & \\
 & 10 & \\
 & 000 & \\
 & 3 & \\
\hline
 & 0;014418 & = \Delta x\, la \\
\text{multipl.} & 62;00000 & = y \\
\hline
 & 0064468 & \\
 & 22040 & \\
 & 002882 & \\
 & 1 & \\
\hline
 & 0;89392 & = y \Delta x\, la
\end{array}
$$

Um nun zu bekommen $\frac{1}{2} y \Delta x^2 (la)^2$ darf man nur das gefundene $y \Delta x\, l a$ mit dem schon bekannten $\Delta x\, l a$ multipliziren, und das Produkt durch 2 dividiren.

$$
\begin{array}{lrl}
 & 0;014418 & = \Delta x\, la \\
 & 0;89392 & = y \Delta x\, la \\
\hline
 & 008228 & \\
 & 3306 & \\
 & 00966 & \\
 & 330 & \\
 & 0032 & \\
 & 11 & \\
 & 009 & \\
 & 3 & \\
\hline
 & 0;012888 & = y \Delta x^2 (la)^2 \\
\text{div. 2)} & & \\
\hline
 & 0;006444 & = \frac{1}{2} y \Delta x^2 (la)^2
\end{array}
$$

Um weiter $\frac{1}{6}y\Delta x^3(la)^3$ zu bekommen, muß man das gefundene $\frac{1}{2}y\Delta x^2(la)^2$ mit $\Delta x la$ multipliziren und das Produkt durch 3 dividiren.

$$0;014418 = \Delta x la$$
$$0;006444 = \tfrac{1}{2}y\Delta x^2(la)^2$$
$$0064$$
$$22$$
$$004$$
$$1$$
$$0;000092 = \tfrac{1}{2}y\Delta x^3(la)^3$$
$$\text{div. } 3)\ 0;000030 = \tfrac{1}{6}y\Delta x^3(la)^3$$

Der folgende Satz in der Reihe ist $\frac{1}{24}y\Delta x^4(la)^4$. Um diesen zu erhalten, muß man $\frac{1}{6}y\Delta x^3(la)^3$ mit $\Delta x la$ multipliziren und durch 4 dividiren.

$$0;014418 = \Delta x la$$
$$0;000030 = \tfrac{1}{6}y\Delta x^3(la)^3$$
$$60$$

Hier findet man sogleich, daß der vierte Satz keine Milliontheile giebt; folglich kann er ganz weggelassen werden, wenn die Logarithmen nur 6 Dezimalziffern bey sich führen. Man addire die gefundenen Säze, nebst der gefundenen Proporzionalzahl 62

$$62;000000 = y$$
$$0;89392 = y\Delta x la$$
$$0;006444 = \tfrac{1}{2}y\Delta x^2(la)^2$$
$$0;000030 = \tfrac{1}{6}y\Delta x^3(la)^3$$
$$62;900394 = y + y\left(\Delta x la + \frac{\Delta x^2(la)^2}{1.\ 2} + \frac{\Delta x^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3}\right)$$
$$= y + \Delta y$$

Weil die beiden lezten Ziffern ungewiß sind, so kann man annehmen $1;798654 = \mathfrak{L}\,62;9004$

Wenn

Wenn der Unterschied Δx sehr klein ist, so wird die Rechnung kürzer, weil man nur einen Satz oder zwei Sätze in der Reihe gebrauchet, wie aus folgendem Exempel zu sehen ist.

Exempel II. Man verlanget die Proporzionalzahl zum Logarithmus 3;578326

Von 3;578326
subtr. 3;578295 $= x =$ Ł 3787
0;000031 $= \Delta x$
2;302585 $= la$
0000062
000009
0;000072 $= \Delta x la$
3787;000 $= y$
0000016
200
000009
41
00000
5
0;273 $= y \Delta x la$

Hier giebt der folgende Satz $\frac{1}{2} y \Delta x^2 (la)^2$ nur Milliontheile; weil aber in $y \Delta x la$ nicht kleinere Theile aus Tausendtheile gefunden sind, so muß man sich damit begnügen, und annehmen, es sey beinahe

3;578326 = Ł 3787;273.....

Wenn der gegebene Logarithmus über die Gränzen der Tafeln ist, so muß man dessen Index oder ganze Zahl um so viel Einheiten vermindern, als nöthig ist, um ihn in den Tafeln zu finden. Man rechnet dann, wie vorher gelehret worden. Zulezt aber wird in der gefundenen Proporzionalzahl das Dezimalzeichen um so viel Stellen weiter zur Rechten gesezet, als Einheiten abgenommen worden; wie aus folgendem Exempel zu sehen ist.

Exempel III. Man verlanget die Proporzionalzahl zum Logarithmus 5;786032. Weil die Tafeln nicht über den Logarithmus 4 gehen, welcher zu 10000 gehöret, so nehme man vom gegebenen Logarithmus 2 oder 3 oder 4 Einheiten ab, und suche ihn dann in der Tafel. Nehmen wir nur 2 Einheiten ab, so wird die Rechnung folgende:

Von	3;786032	
subtr.	3;785970	$= x = \mathfrak{L}\,6109$
	0;000062	$= \Delta x$
multipl.	2;302585	$= \mathrm{l}a$
	0000024	
	100	
	000008	
	10	
	0;000143	$= \Delta x \, \mathrm{l}a$
mult.	6109;000	$= y$
	0000648	
	210	
	000014	
	0;873	$= y \Delta x \, \mathrm{l}a$

Weil $y \Delta x \, \mathrm{l}a$ nur bis auf Tausendtheile gehet u. $\frac{1}{2} y \Delta x^2 (\mathrm{l}a)^2$, wenn man den Versuch machet, keine Tausendtheile giebet, so bleibe man bei dem Gefundenen. Es wird also

	3;786032	$= \mathfrak{L}\,6109;873$
folgl.	5;786032	$= \mathfrak{L}\,610987;3$

Diese Folgerung ist also zu verstehen:

zu	3;786032	$= \mathfrak{L}\,6109;873$
addire	2;000000	$= \mathfrak{L}\,100$
	5;786032	$= \mathfrak{L}\,6109;873 + \mathfrak{L}\,100$
		$= \mathfrak{L}\,(6109;873 \times 100)$
		$= \mathfrak{L}\,610987;3$

§. 16.

Aufgabe.

Zu einer Zahl, die nicht in den Tafeln stehet, den Logarithmus finden.

Auflösung. Man suche in der Tafel die nächst kleinere Zahl, und nenne sie x, deren Logarithmus nenne man z. Man merke, um wie viel die gegebene Zahl größer ist als x, so ist der Unterschied Δx. Nun berechne man Δz nach der Formel (§. 13).

$$\Delta z = m\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} + \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} + \&c.\right)$$

oder $\Delta z = \dfrac{m\Delta x}{x} - \dfrac{m\Delta x^2}{2x^2} + \dfrac{m\Delta x^3}{3x^3} - \dfrac{m\Delta x^4}{4x^4} + \&c.$

Weil in den Tafeln die Basis 10 ist, so ist $m = 0;4342944$ (§. 10). Wenn Δz gefunden worden, so addire man es zu z. Die Summe ist der verlangte Logarithmus.

Exempel I. Es wird verlanget der Logarithmus von 218;459764.

Von 218;459764
subtr. 218;000000 $= x$ dessen Log. $= 2;338456$

0;459764 $= \Delta x$

Um $m\dfrac{\Delta x}{x}$ zu bekommen, verrichte man gewöhnlichermaßen die Division, hernach multiplizire man mit m.

0;459764 : 218 = 0;002109 $= \dfrac{\Delta x}{x}$

436	× 0;434294 $= m$
237	000840
21.8	3
1964	00063
1962	0008
2	0;000915 $= \dfrac{m\Delta x}{x}$

 Um

Um $\frac{m\Delta x^2}{2x^2}$ zu bekommen, muß man das gefundene $\frac{m\Delta x}{x}$ mit $\frac{\Delta x}{x}$ multipliziren, und das Produkt durch 2 dividiren.

$$0{;}002109 = \frac{\Delta x}{x}$$

$$0{;}000915 = \frac{m\Delta x}{x}$$

$$000$$

$$1$$

$$0{;}000001 = \frac{m\Delta x^2}{x^2}$$

div. 2)

$$0{;}000000 = \frac{m\Delta x^2}{2x^2}$$

Man siehet hieraus, daß, wenn man nicht weiter als bis 6 Dezimalziffern gehen will, der zweite Satz null ist. Folglich ist

$$\Delta z = 0{;}000915 = \frac{m\Delta x}{x}$$

addire $z = 2{;}338456$

$$z + \Delta z = 2{;}339371 = \text{log.}\, 218{;}459764$$

Wenn die gegebene Zahl die Gränzen der Tafeln übersteiget, und eine ganze Zahl ist, so schneide man rechter Hand soviel Dezimalziffern ab, als nöthig ist, um daß die ganze Zahl sich in der Tafel finde, verfahre wie vorher, und vergrößere zuletzt den gefundenen Logarithmus um so viel Einheiten als anfänglich Dezimalziffern abgeschnitten worden, wie aus folgendem Exempel zu sehen ist.

Exempel II. Es soll der Logarithmus gefunden werden zur Zahl 8976548. Weil die gewöhnlichen Tafeln

feln nur bis Zahlen von 4 Ziffern gehen, so suche man den Logarithmus zu 8976;548000.

Von 8976;548000
subtrah. 8976;000000 $= x$, dessen Log. = 3;953083

$$0;548000 = \Delta x$$

$$0;548000 : 8976 = 0;000061 = \frac{\Delta x}{x}$$

```
 53856
 -----
  9440
  8976
  ----
   464
```

$$\times\ 0;434294 = m$$

```
000004
    20
 00000
     1
--------
0;000025
```

$$0;000025 = \frac{m\Delta x}{x}$$

Man siehet leicht ein, daß $\frac{m\Delta x^2}{2x^2}$ keine Millionentheile giebt. Also bleibt es bei der gefundenen Differenz.

$$\Delta z = 0;000025 = \frac{m\Delta x}{x}$$

addire $z = 3;953083$

$$z + \Delta z = 3;953108 = L.8976;548$$

Man rücke nun in der Proporzionalzahl das Dezimalzeichen um drei Stellen weiter zur Rechten, und addire 3 zum Logarithmus, so kömt

$$6;953108 = L.8976548$$

Dieses ist also zu verstehen:

$$3;953108 = L\,8976;548$$

addire $3;000000 = L\,1000$

$$6;953108 = L\,8976;548 + L\,1000$$
$$= L(8976;548 \times 1000)$$
$$= L\,8976548$$

Wenn die gegebene Zahl über die Gränzen der Tafeln ist und Brüche bei sich führet, so kann man auf einer ähnlichen Art verfahren; nemlich man rücket das Dezimalzeichen anfänglich weiter zur Linken, um so viel Stellen als nöthig ist, und addiret zulezt zum gefundenen Logarithmus eben so viel Einheiten.

Exempel III. Es wird verlanget der Logarithmus von 765438;549762. Man rücke das Dezimalzeichen um zwei Stellen weiter zur Linken.

$$\begin{array}{ll} \text{Von} & 7654;385497\ldots\ldots \\ \text{subtr.} & \underline{7654;000000} = x, \text{ dessen Log. } 3;883888 \\ & \quad 0;385497 = \Delta x \end{array}$$

$$0;385497 : 7654 = 0;000050 = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\begin{array}{l} 38270 \\ \hline 2797 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \times\, 0;434294 & = m \\ \hline 000000 & \\ 20 & \\ 00000 & \\ 1 & \\ \hline 0;000021 & = \dfrac{m\Delta x}{x} \end{array}$$

Es ist also

$$\Delta z = 0;000021 = \frac{m\Delta x}{x}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{addire} & \underline{z = 3;883888} & \\ & z+\Delta z = 3;883909 & = L\,7654;385497\ldots \\ \text{addire} & 2;000000 & = L\,100 \\ \hline & 5;883909 & = L\,765438;5497\ldots \end{array}$$

Es sind zwar hier in der gegebenen Zahl die lezten Dezimalziffern weggelassen. Man siehet aber aus der Rechnung, daß sie nichts im Logarithmus verändern, wenn dieser nur bis auf 6 Dezimalziffern berechnet wird.

§. 17.

Die angegebene Methoden zum Gebrauche der Logarithmentafeln sind zwar ziemlich genau, und wenn ein Irrthum vorfällt, so kann er nicht beträchtlich seyn; sie erfordern aber Rechnungen, die oft etwas lang werden. Es giebt Fälle, wo man sich mit einem bloßen Ohngefähr begnüget, und dann kann man die Tafeln ohne weitere Berechnung nutzen, wie sie sind. Es werde die Zahl zu einem Logarithmus verlanget. Wir nehmen an, daß die Tafeln nicht über die Zahl 10000 und folglich nicht über den Logarithmus 4;000000 gehen.

I) Hat der gegebene Logarithmus die Kennziffer 3, so findet man in der Tafel die ganzen Zahlen, zwischen welchen die Proporzionalzahl fällt. Gesetzt, der Logarithmus ist 3;754933, so findet man

$$3;754883 = \mathfrak{L}\,5687$$
$$3;754960 = \mathfrak{L}\,5688$$

Folglich ist die Zahl, 5687 und ein Bruch, den man aus der Acht lassen kann, wenn es nur auf ein Ohngefähr ankömt.

II) Ist die Kennziffer kleiner als 3, so vergrößere man sie um 1, 2 oder 3 Einheiten, so daß man den Logarithmus mit der Kennziffer 3 suchen könne. Von der nächst kleineren Zahl schneide man so viel Dezimalziffern ab, als Einheiten zugesetzet worden, so bekömt man noch einen Bruch, nebst der ganzen Zahl. Z. E. Es wird verlanget die Proporzionalzahl zum Logarithmus 1;655439. Man suche 3;655439, so ist

$$3;655427 = \mathfrak{L}\,4523$$
$$\text{folgl.}\quad 1;655427 = \mathfrak{L}\,45;23$$

$$\text{Denn von}\quad 3;655427 = \mathfrak{L}\,4523$$
$$\text{subtr.}\quad 2;000000 = \mathfrak{L}\,100$$
$$1;655427 = \mathfrak{L}\,4523 - \mathfrak{L}\,100$$
$$= \mathfrak{L}\,\frac{4523}{100} = \mathfrak{L}\,45;23$$

Also ist die verlangte Zahl etwas mehr als 45;23

III) Ist der Logarithmus größer als 4, so nehme man so viel Einheiten ab, als nöthig ist, um ihr in den Tafeln zu finden. Zu der nächst kleineren Zahl setze man rechter Hand so viel Nullen an, als Einheiten abgenommen worden. Gesetzet, es wird verlanget die Zahl zum Logarithmus 5;193844, so nehme man zwei Einheiten ab und suche 3;193844. Man findet

3;193681 = L1562
folglich 5;193681 = L156200

Denn zu 3;193681 = L1562
addire 2;000000 = L100

5;193681 = L1562 × L100
= L(1562 × 100)
= L156200

Es ist also die verlangte Zahl über 156200 oder zwischen 156200 und 156300, welches zwar sehr wenig bestimmt ist, aber doch als ein bloßes Ohngefähr in einigen Fällen gelten kann.

§. 18.

Ist die Zahl gegeben, wozu der Logarithmus ohngefähr gefunden werden soll, so ist die Zahl entweder genau in den Tafeln anzutreffen, oder sie fällt zwischen die Tafel-Zahlen, oder sie übersteiget die Gränzen der Tafeln.

I) Wenn die Zahl selbst in der Tafel ist, so stehet der Logarithmus dabei.

II) Wenn sie zwischen den Tafel-Zahlen fällt, so kann man die Ziffern im Logarithmus behalten, welche sowohl im nächst kleineren als auch im nächst größeren Logarithmus vorhanden sind. Z. E. Es wird verlanget der Logarithmus von 5349;205764, oder überhaupt 5349 + ein Bruch

L5349 = 3;728273
L5350 = 3;728345

Es

Es fällt also der verlangte Logarithmus zwischen diesen beiden. Behält man nur die gemeinschaftlichen Ziffern, so ist

$$\mathfrak{L}(5349 + \text{ein Bruch}) = 3{;}728\ldots\ldots$$

III) Ist die gegebene Zahl über die Gränzen der Tafel, so schneide man so viel Dezimalziffern davon ab, als nöthig ist, um daß sie zwischen den Tafelzahlen anzutreffen sey. Man verfahre wie im vorigen Falle, und vergrößere zulezt den gefundenen Logarithmus um so viel Einheiten, als Ziffern abgeschnitten worden. Z. E. Man verlanget den Logarithmus von 563828. Man suche 5638;28 oder 5638 + ein Bruch, so findet man

$$3{;}751125 = \mathfrak{L}5638$$
$$3{;}751202 = \mathfrak{L}5639$$

folglich $\mathfrak{L}5638{;}28 = 3{;}751\ldots$
und $\mathfrak{L}563828 = 5{;}751\ldots$

Denn es ist $\mathfrak{L}5638{;}28 = 3{;}751\ldots$
add. $\mathfrak{L}100 = 2$

$$\mathfrak{L}563828 = 5{;}751\ldots$$

§. 19.

Wenn man etwas mehr Genauigkeit verlanget, jedoch ohne die gehörigen Rechnungen (§. 15 und §. 16) anzustellen; so pfleget man sich eines Verhältnisses zu bedienen, welches zwar nicht auf der Wahrheit gegründet ist, welches aber doch ziemlich eintrift, wenn der Unterschied der Logarithmen oder der Proporzionalzahlen sehr klein ist. Nemlich man nimmt an, daß die Unterschiede der Logarithmen sich geometrisch verhalten, wie die Unterschiede der dazu gehörigen Proporzionalen.

§. 20.

Vermittelst dieser Hypothese läßt sich nun die Zahl welche zu einem gegebenen Logarithmus gehört, zum gewöhnlichen Gebrauche mit hinlänglicher Genauigkeit finden.

Man

Man suche den nächst kleineren Logarithmus und die dazu gehörige Zahl. Man subtrahire den nächst kleineren Logarithmus von dem nächst größeren und von dem gegebenen. Der Unterschied der nächsten Proporzionalzahlen ist allemal 1 und brauchet nicht gesuchet zu werden. Man sage also: Wie sich verhält der größere Unterschied der Logarithmen zum kleineren Unterschied derselben, so verhält sich der größere Unterschied 1 der Proporzionalzahlen zum gesuchten. Was gefunden wird, muß man zur kleineren Proporzionalzahl addiren.

Exempel I. Der gegebene Logarithmus sey 3;578326. Dieser Logarithmus fällt zwischen zwei anderen in der Tafel, und wenn wir dessen Proporzionalzahl z nennen, so folgen Logarithmen und Proporzionalzahlen also auf einander

$$\begin{array}{l} 3{;}578295 = L\,3787 \\ 3{;}578326 = L\,z \\ 3{;}578410 = L\,3788 \end{array}$$

man mache folgende Subtrakzionen

$$\begin{array}{rr|rl} & 3{;}578410 & 3{;}578326 & \\ \text{subtr.} & 3{;}578295 & 3{;}578295 & \text{subtr.} \\ \hline & 0{;}000115 & 0{;}000031 & \end{array}$$

und folgende Regel de Tri

$$\begin{array}{lr} & 1 \\ 0{;}000115 & 0{;}000031 \\ \hline & \dfrac{0{;}000031}{0{;}000115} = \dfrac{31}{115} = 0{;}269\ldots \end{array}$$

Es wäre also 3;578326 = L3787;268.... welche Zahl um 0;005 oder $\frac{5}{1000}$ kleiner ist, als die welche §. 15 im zweiten Exempel gefunden worden.

Exempel II. Es werde verlanget die Zahl zum Logarithmus 1;798654. Um diesen Logarithmus näher in den

den Tafeln zu finden, suche man ihn unter der Kennziffer 3. Man findet

$$3;798651 = \mathfrak{L}6290$$
$$3;798654 = \mathfrak{L}z$$
$$3;798720 = \mathfrak{L}6291$$

Man nehme die Unterschiede

Von	3;798720	Von	3;798654
subtr.	3;798651	subtr.	3;798651
	0;000069		0;000003

Man mache die Regel de Tri

$$\begin{array}{ccc} 0;000069 & 1 & 0;000003 \end{array}$$

$$\frac{0;000003}{0;000069} = \frac{3}{69} = \frac{1}{23} = 0;0434\ldots\ldots$$

Also ist $3;798654 = \mathfrak{L}6290;0434\ldots\ldots$
folglich $1;798654 = \mathfrak{L}62;900434\ldots\ldots$

Die gefundene Zahl ist von der im §. 15 Exempel I. erhaltenen sehr wenig unterschieden.

Exempel III. Es sey gegeben der Logarithmus 5;786032. Man suche 3;786032

$$3;785970 = \mathfrak{L}6109$$
$$3;786032 = \mathfrak{L}z$$
$$3;786041 = \mathfrak{L}6110$$

Von	3;786041	Von	3;786032
subtr.	3;785970	subtr.	3;785970
	0;000071		0;000062

$$\begin{array}{ccc} 0;000071 & 1 & 0;000062 \end{array}$$

$$\frac{0;000062}{0;000071} = \frac{62}{71} = 0;873\ldots\ldots$$

Also ist $3;786032 = \mathfrak{L}6109;873\ldots\ldots$
folglich $5;786032 = \mathfrak{L}610987;3\ldots\ldots = \mathfrak{L}z$

Wel=

Welches völlig mit dem dritten Exempel des 15ten Paragraphs übereinstimmet.

Zusatz. Wenn man das vorgeschriebene Verfahren verkürzen will, so darf man nur die lezten Ziffern der Logarithmen subtrahiren, und sogleich die kleinere Differenz durch die größern dividiren, um den Bruch der Proporzionalzahl zu bekommen.

Es wird zum Exempel die Proporzionalzahl gesuchet zu 5;584766, so hat man

$$3;584670 = L3843$$
$$3;584766 = Lz$$
$$3;584783 = L3844$$

Von	783	Von	766
subtr.	670	subtr.	670
	113		96

$$\frac{96}{113} = 0;849$$

Also $3;584766 = L3843;849....$
und $5;584766 = L384384;9....$

§. 21.

Vermittelst der nemlichen Proporzion kann man beinahe den Logarithmus finden, welcher zu einer gegebenen Zahl gehöret, welche nicht in den Tafeln genau anzutreffen ist. Man saget: wie 1, als der Unterschied der beiden nächsten Zahlen, sich verhält zum gegebenen Bruche; also verhält sich der Unterschied der beiden nächsten Logarithmen zu einer vierten Größe, welche zum kleinesten Logarithmus addiret werden muß.

Exem-

Exempel I. Man verlanget den Logarithmus zur Zahl 218;459764. Weil hier die ganze Zahl nur 3 Ziffern hat, und die Tafeln bis 4 Ziffern gehen, so kann man das Dezimalzeichen anfänglich um eine Stelle weiter zur Rechten rücken.

3;339253 = L2184
z = L2184;59764
3;339451 = L2185

Von 3;339451
subtr. 3;339253
0;000198

Wie 1 zu 0;59764
also 0;000198
zu 0;59764 × 0;000198

0;59764
× 0;000198

059
05
48
0
4

0;000118
addire 3;339253

3;339371 = L2184;59764
folgl. 2;339371 = L218;459764

Dieses stimmet vollkommen mit dem ersten Exempel des 16ten Paragraphs überein.

Exempel II. Es soll gefunden werden der Logarithmus von 8976548. Weil diese Zahl über die Gränzen der Tafeln ist, so suche man anfänglich den Logarithmus zu 8976;548

3;953083 = L8976
z = L8976;548
3;953131 = L8977

Von 3;954131
subtr. 3;953083

0;000048

Wie 1 zu 0;548
also 0;000048

00
21
0
4

zu 0;000025
addire 3;953083

3;953108 = L8976;548
folglich 6;953108 = L8976548

Der gefundene Logarithmus ist gar nicht von demjenigen unterschieden, welcher im 2ten Exempel des §. 16 herauskam.

Exempel III. Es wird verlanget der Logarithmus zur Zahl 765438;549762. Weil hier die ganze Zahl für die Tafeln zu groß ist, so suche man anfänglich L7654;385497....

3;883888 = L7654
z = L7654;385497....
3;883945 = L7655

Von 3;883945
subtr. 3;883888

0;000057

Wie

Wie 1 zu 0;385497
so 0;000057

05
1 4
0
2

zu 0;000022
addire 3;883888

3;883910 = L7654;385497....
folgl. 5;883910 = L765438;5497....

Welches auch beinahe im dritten Exempel des §. 16 gefunden worden.

Zusatz I. Will man das Verfahren verkürzen, so brauchet man nur den gegebenen Bruch der Proporzionalzahl mit dem Unterschiede der nächsten Logarithmen zu multipliziren. Es werde verlanget der Logarithmus von 4763;852624.

Von 3;677972 = L4764
subtr. 3;677881 = L4763

0;000091
× 0;852624

000002
7 0
00000
4

0;000076
addire 3;677881 = L4763

3;677957 = L4763;852624

§. 22.

Es giebet Logarithmen-Tafeln, wo noch eine Tafel der Proporzional-Theile angehänget ist, vermittelst welcher

man sogleich den Logarithmus einer Zahl finden kann, welche die Gränzen der Tafel um eine Ziffer übersteiget. Zugleich ist auch neben den Logarithmen selbst ihr Unterschied angezeiget, so daß man nicht nöthig hat ihn erstlich durch die Subtrakzion zu suchen.

Wir wollen den Gebrauch der Tafel der Proporzional-Theile durch ein Paar Exempel erklären.

Exempel I. Es sey verlanget der Logarithmus von 57698. Man schneide die 4 ersten Ziffern ab, weil wir voraussetzen, daß die Tafel nur bis 4 Ziffern gehet

5769|8

Man suche 5769 in der Logarithmentafel, so findet man

$$3;761101 = L5769$$

nebenbei findet man 75 als den Unterschied der Logarithmen. Man suche 75 in der Tafel der Proporzional-Theile, und gehe herunter in der Kolumne, wo oben 75 stehet, bis man an die Stelle kömmt, wo linker Hand 8 stehet, nemlich die abgeschnittene Ziffer, so findet man 60. Diese 60 müssen zum gefundenen Logarithmus addiret werden. Zugleich muß die Kennziffer 3 um 1 vergrößert werden, weil die gegebene Zahl eine Ziffer mehr hat.

$$\begin{array}{rr} & 3;761101 = L5769 \\ \text{add.} & 60 \\ \hline & 4;761161 = L57698 \end{array}$$

Exempel II. Es wird verlanget der Logarithmus zur Zahl 11394

$$3;056524 = L1139$$

Der Unterschied der Logarithmen ist 381, und stehet neben bei. In der Tafel der Proporzional-Theile, suche man

unter

unter 381, gerade über die 4 welche linker Hand stehen, so findet man 152

$$\begin{array}{lr} & 3;056524 = \mathfrak{L}1139 \\ \text{add.} & 152 \\ \hline & 4;056676 = \mathfrak{L}11394 \end{array}$$

Wir wollen uns bei dem Beweise nicht aufhalten. Diese kleine Operazion ist im Grunde nichts anders, als das Multipliziren, welches im Zusatze des §. 21 vorgeschrieben worden. Nur daß der Unterschied und das Produkt schon in den Tafeln berechnet sind.

§. 23.

Wir sind bei dem Gebrauche der Logarithmentafeln etwas weitläuftig gewesen; weil es höchst nöthig ist, daß ein Anfänger sich ein für allemal damit bekannt mache. Ein jeder der viele mathematische Rechnungen zu machen hat, muß sich Logarithmentafeln anschaffen, und sie zu nutzen wissen. Uebrigens haben wir diese Lehre bis hierher ersparet, um alles was den Unterschied der Logarithmen und der dazu gehörigen Proporzionalzahlen betrift, zusammen abzuhandeln. Im sechsten Hauptstücke dieses Werkes, wurden die Logarithmen überhaupt, ohne Rücksicht auf eine besondere Basis betrachtet. Hingegen in diesem achtzehnten Hauptstücke sind sie hauptsächlich als zu gewissen Systemen gehörig behandelt worden, und insbesondere ist der Gebrauch des gewöhnlichen Briggischen Systemes erkläret worden.

Neunzehntes Hauptstück.

Von der Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Zirkelgrößen.

§. 1.

Es giebt in der Algebra verschiedene Größen, die ihre Namen aus der Geometrie erhalten haben, weil diese Wissenschaft zu deren Untersuchung die erste Gelegenheit gegeben hat. Jedoch können solche Größen sehr wohl ohne Hülfe der Geometrie erkläret werden. Dergleichen sind die Quadratzahlen, Kubikzahlen, Polygonalzahlen, und die hyperbolischen Logarithmen. Alle diese Zahlen kann man berechnen, ohne zu wissen, was ein Quadrat, ein Kubus, ein Polygon, eine Hyperbel in der Meßkunst zu bedeuten haben.

Es kann uns also nichts hindern, die Zirkelgrößen welche eigentlich zur Trigonometrie gehören, hier bloß als algebraische Quantitäten zu betrachten, und den Leser so viel damit bekannt zu machen, als es zur Erläuterung des folgenden nöthig seyn wird.

§. 2.

Unter den unendlichen Reihen, die in algebraischen Rechnungen gebräuchlich sind, giebt es einige, die sehr häufig vorkommen. Und da es unbequem seyn würde, allemal den Anfang derselben auszuschreiben, so sind die Mathematiker eins geworden, dergleichen Reihen durch gewisse besondere Namen kürzer auszudrücken. Wir wollen vorzüglich folgende zwei Reihen bemerken.

$$\text{I)}\ \mathfrak{S}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

$$\text{II)}\ \mathfrak{S}'x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$$

Die erste heißt der Sinus von x, welches wir der Kürze halben durch $\mathfrak{S}x$ angedeutet haben. Die zweite wird genannt der Kosinus von x, welches wir, wie hier geschehen, durch $\mathfrak{S}'x$ ausdrücken wollen. Wenn also in der Folge diese Wörter oder Zeichen vorkommen, so gedenke man sich allemal in deren Stelle die angeführten Reihen.

Man merke noch, daß die zweite Reihe aus der ersten entstehet, wenn man das Quadrat der ersten von 1 subtrahiret, und aus dem Reste die Quadratwurzel ausziehet. Es ist also allemal

$$\mathfrak{S}'x = \surd[1 - (\mathfrak{S}x)^2]$$

Um sich dessen zu versichern, setze man

$$\surd[1 - (\mathfrak{S}x)^2] = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \&c.$$

Man quadrire beiderseits, man setze im ersten Gliede anstatt $(\mathfrak{S}x)^2$ das Quadrat der Reihe, welche durch $\mathfrak{S}x$ ausgedrücket wird. Man vergleiche die Koeffizienten, so wird sich ihr Werth so bestimmen, wie es in der Reihe $\mathfrak{S}'x$ geschehen ist.

Anmerkung. Wenn in der Folge Quadrate oder andere Potenzen von solchen abgekürzten Ausdrücken vorkommen werden, so wollen wir die Haken weglaßen. Es wird also $\mathfrak{S}x^n$, $\mathfrak{S}'x^n$ so viel bedeuten, als $(\mathfrak{S}x)^n$, $(\mathfrak{S}'x)^n$.

§. 3.

Aus beiden vorhergehenden Reihen entstehen wiederum andere, nemlich

III) Die Tangente von x, oder

$$\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x} = \frac{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c.}$$

IV) Die Kotangente von x, oder

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x} = \frac{1}{\mathfrak{T}x} = \frac{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c.}{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.}$$

V) Die Sekante vón x, nemlich

$$\mathfrak{ß}x = \frac{1}{\mathfrak{S}'x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c.}$$

IV) Die Kosekante von x, das ist

$$\mathfrak{ß}'x = \frac{1}{\mathfrak{S}x} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.}$$

VII) Der Sinus-Versus von x, nemlich

$$\mathfrak{V}x = 1 - \mathfrak{S}'x = x^2 - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \&c.$$

VIII) Der Kosinus-Versus von x, das ist

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \mathfrak{S}x = 1 - x + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

Anmerkung. Weil die Zeichen willkürliche Dinge sind, so haben wir zur Bezeichnung der 8 angeführten Reihen

Reihen nur einzelne deutsche Kapital-Buchstaben, nebst einem Striche dabei, wo die Sylbe Ko vorkömmt, gebrauchet. Sonst pfleget man die lateinischen Namen abgekürzet zu gebrauchen, als

Sin. x	Cosin. x
Tang. x	Cot. x
Sec. x	Cosec. x
Sin. vers. x	Cosin. vers. x

Diese Schreibart nimmt in Rechnungen etwas zu viel Raum ein. Wir wollen noch anmerken, daß von gedachten acht Reihen die vier ersten am häufigsten genutzet werden, nemlich der Sinus, der Kosinus, die Tangente und die Kotangente der veränderlichen Größe.

§. 4.

Die veränderliche Größe x wovon die acht angeführten Reihen Funkzionen sind, hat auch einen eigenen Namen; sie heißt aus geometrischen Ursachen der Arkus oder Zirkelbogen derselben. Es sey

$$u = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{\&c.}$$

so ist u der Sinus von x. Hingegen ist x der Arkus des Sinus u, worunter man hier weiter nichts verstehen muß, als die veränderliche Größe, woraus die Reihe entstehet, deren Aggregat hier durch u angedeutet wird, und die wir den Sinus von x genannt haben. Wir wollen das Wort Arkus durch ein bloßes A andeuten. Also

Wenn $u = \mathfrak{S}x$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{S}u$
Wenn $u = \mathfrak{S}'x$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{S}'u$
Wenn $u = \mathfrak{T}x$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{T}u$
Wenn $u = \mathfrak{T}'x$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{T}'x$
&c. &c.

Anmerkung. Der Arkus, dessen Sinus, dessen Kosinus, Tangente, Kotangente, u. s. f. werden Zirkelgrößen genannt, oder auch trigonometrische Größen.

§. 5.

Weil der Sinus eine Funkzion des Arkus ist, so ist auch der Arkus eine Funkzion des Sinus. Eben so ist der Arkus eine Funkzion des Kosinus, der Tangente, u. s. f. Es läßt sich also der Arkus durch eine unendliche Reihe ausdrücken, worinn alle Sätze Funkzionen des Sinus, oder des Kosinus, u. s. f. sind. Daher entstehen wiederum neue Reihen, die auch in algebraischen Rechnungen gebrauchet werden.

I) Es sey

$$u = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

so ist $u = \mathfrak{S}x$. Man nehme an, es sey

$$x = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \&c.$$

Diese Reihe und ihre Potenzen setze man in der vorigen Reihe anstatt x und dessen Potenzen, und vergleiche die Koeffizienten, so wird man finden

$$x \text{ oder } \mathfrak{A}\mathfrak{S}u = u + \frac{1.u^3}{2.3} + \frac{1.3.u^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.u^7}{2.4.6.7} + \&c.$$

II) Es werde verlanget $\mathfrak{A}\mathfrak{S}'u$. Es sey $\mathfrak{A}\mathfrak{S}'u = x$, es ist also u der Kosinus des verlangeten Arkus x. Ist aber u der Kosinus, so wird der Sinus seyn $\sqrt{(1 - u^2)}$ oder $(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}$. Denn es ist

$$\mathfrak{S}'x = \sqrt{(1 - \mathfrak{S}x^2)}$$

daher $\mathfrak{S}'x^2 = 1 - \mathfrak{S}x^2$

und $\mathfrak{S}x^2 = 1 - \mathfrak{S}'x^2$

folglich $\mathfrak{S}x = \sqrt{(1 - \mathfrak{S}'x^2)}$

oder $\mathfrak{S}x = \sqrt{(1 - u^2)}$

zu diesem Sinus ist der Arkus, vermöge voriger Formel

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{2.\ 3} + \frac{1.3.(1-u^2)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5} + \frac{1.3.5.(1-u^2)^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7} + \&c.$$

Und also wird

$$\mathfrak{AS}'u = (1-u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{2.\ 3} + \frac{1.3.(1-u^2)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5} + \&c.$$

oder auch

$$\mathfrak{AS}'u = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1.(1-u^2)}{2.\ 3} + \frac{1.3.(1-u^2)^2}{2.4.5} + \frac{1.3.5.(1-u^2)^3}{2.4.6.7} + \&c.\right)$$

III) Es sey $\mathfrak{AT}u = x$, so ist

$$u = \mathfrak{T}x$$

$$u = \frac{\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$$

$$u = \frac{\mathfrak{S}x}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}$$

$$u^2 = \frac{\mathfrak{S}x^2}{1-\mathfrak{S}x^2}$$

$$u^2 - u^2\mathfrak{S}x^2 = \mathfrak{S}x^2$$

$$u^2 = \mathfrak{S}x^2 + u^2\mathfrak{S}x^2$$

$$u^2 = \mathfrak{S}x^2(1+u^2)$$

$$\frac{u^2}{1+u^2} = \mathfrak{S}x^2$$

$$\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} = \mathfrak{S}x$$

Der Arkus dieses gefundenen Sinus ist

$$\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1.\,u^3}{2.3(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.\,3.\,u^5}{2.4.5(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}+\text{\&c.}$$

Also ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T}u=\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1.\,u^3}{2.3.(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.\,3.\,u^5}{2.4.5.(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}+\text{\&c.}$$

oder

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T}u=\frac{u}{\sqrt{(1+u^2)}}.\left(1+\frac{1.\,u^2}{2.3.(1+u^2)}+\frac{1.\,3.\,u^4}{2.4.5.(1+u^2)^2}+\text{\&c.}\right)$$

IV. Es sey $\mathfrak{A}\mathfrak{T}'u=x$, so ist

$$u=\mathfrak{T}'x$$

$$u=\frac{\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}$$

$$u=\frac{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}{\mathfrak{S}x}$$

$$u^2=\frac{1-\mathfrak{S}x^2}{\mathfrak{S}x^2}$$

$$u^2\mathfrak{S}x^2=1-\mathfrak{S}x^2$$

$$u^2\mathfrak{S}x^2+\mathfrak{S}x^2=1$$

$$\mathfrak{S}x^2(1+u^2)=1$$

$$\mathfrak{S}x^2=\frac{1}{1+u^2}$$

$$\mathfrak{S}x=\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}}$$

Der Arkus zu diesem Sinus ist

$$\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2.3.(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.\,3}{2.4.5.(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}+\text{\&c.}$$

oder

oder

$$\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{2.3.(1+u^2)}+\frac{1.3}{2.4.5.(1+u^2)^2}+\&c.\right)$$

Es wird also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T}'u=\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}}.\left(1+\frac{1}{2.3.(1+u^2)}+\frac{1.3}{2.4.5.(1+u^2)^2}+\&c.\right)$$

V) Es sey $\mathfrak{A}\mathfrak{ß}u=x$, so ist

$$u=\mathfrak{ß}x=\frac{1}{\mathfrak{S}'x}=\frac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}$$

daher ist $u^2=\dfrac{1}{1-\mathfrak{S}x^2}$.

$$u^2-u^2\mathfrak{S}x^2=1$$

$$u^2-1=u^2\mathfrak{S}x^2$$

$$\frac{u^2-1}{u^2}=\mathfrak{S}x^2$$

$$\frac{\sqrt{(u^2-1)}}{u}=\mathfrak{S}x$$

Hiervon ist der Arkus

$$\frac{(u^2-1)^{\frac{1}{2}}}{u}+\frac{1.(u^2-1)^{\frac{3}{2}}}{2.3.u^3}+\frac{1.3.(u^2-1)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5.u^5}+\frac{1.3.5.(u^2-1)^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7.u^7}.$$

oder

$$\frac{\sqrt{(u^2-1)}}{u}\left(1+\frac{1.(u^2-1)}{2.3.u^2}+\frac{1.3.(u^2-1)^2}{2.4.5.u^4}+\&c.\right)$$

Also ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{ß}u=\frac{\sqrt{(u^2-1)}}{u}\left(1+\frac{1(u^2-1)}{1.3.u^2}+\frac{1.3.(u^2-1)^2}{2.5.5.u^4}+\&c.\right)$$

VI) Es

VI) Es sey $\mathfrak{A}\text{ß}'u = x$, so ist

$$u = \text{ß}'x$$
$$u = \frac{1}{\mathfrak{S}x}$$
$$u\mathfrak{S}x = 1$$
$$\mathfrak{S}x = \frac{1}{u}$$

Hiervon ist der Arkus

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{2.3.u^3} + \frac{1.3}{2.4.5.u^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.u^7} + \text{\&c.}$$

Also ist

$$\mathfrak{A}\text{ß}'u = \frac{1}{u} + \frac{1}{2.3.u^3} + \frac{1.3}{2.4.5.u^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.u^7} + \text{\&c.}$$

VII) Es sey $\mathfrak{A}\mathfrak{V}u = x$, so ist

$$u = \mathfrak{V}x$$
$$u = 1 - \mathfrak{S}'x$$
$$u = 1 - \sqrt{(1 - \mathfrak{S}x^2)}$$
$$\sqrt{(1 - \mathfrak{S}x^2)} = 1 - u$$
$$1 - \mathfrak{S}x^2 = (1 - u)^2$$
$$1 - \mathfrak{S}x^2 = 1 - 2u + u^2$$
$$2u - u^2 = \mathfrak{S}x^2$$
$$\sqrt{(2u - u^2)} = \mathfrak{S}x$$

Hiervon ist der Arkus

$$(2u-u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.(2u-u^2)^{\frac{3}{2}}}{2.3} + \frac{1.3.(2u-u^2)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5} + \text{\&c.}$$

oder

$$\sqrt{(2u-u^2)}\left(1 + \frac{1.(2u-u^2)}{2.3} + \frac{1.3.(2u-u^2)^2}{2.4.5} + \text{\&c.}\right)$$

Also ist

$$\mathfrak{AV}u = \sqrt{(2u-u^2)}.\left(1+\frac{1.(2u-u^2)}{2.3}+\frac{1.3.(2u-u^2)^2}{2.4.5}+\&c.\right)$$

VIII) Es sey $\mathfrak{AV}'u = x$, so ist

$$u = \mathfrak{V}'x$$
$$u = 1 - \mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}x = 1 - u$$

Hiervon ist der Arkus

$$(1-u)+\frac{1.(1-u)^3}{2.3}+\frac{1.3.(1-u)^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5.(1-u)^7}{2.4.6.7}+\&c.$$

Also ist

$$\mathfrak{AV}'u = (1-u)+\frac{1.(1-u)^3}{2.3}+\frac{1.3.(1-u)^5}{2.4.5}+\&c.$$

Zusatz. Die meisten von diesen Reihen können zwar noch auf einer anderen Art ansgedrücket werden, wir haben aber hier solche Ausdrücke gesuchet, die sich leicht finden und beweisen laßen. Jedesmal also, wenn solche Größen als $\mathfrak{AS}u$, $\mathfrak{AS}'u$, $\mathfrak{AT}u$, u. s. f. vorkommen, braucht man sich weiter nichts dabei vorzustellen, als die Reihen, welche wir in diesem Paragraph herausgebracht haben.

§. 6.

Aufgabe.

Zirkelgrößen differenziren.

Auflösung. Man gebrauche folgende 16 Formeln

I) $\partial\mathfrak{S}x = \partial x\mathfrak{S}'x$

II) $\partial\mathfrak{S}'x = -\partial x\mathfrak{S}x$

III) $\partial\mathfrak{T}x = \dfrac{\partial x}{\mathfrak{S}'x^2}$

IV) $\partial\mathfrak{T}'x = \dfrac{-\partial x}{\mathfrak{S}x^2}$

$$\text{V)}\quad \mathrm{d}\text{ß}x = \frac{\mathrm{d}x\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x^2} = \frac{\mathrm{d}x\mathfrak{T}x}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\text{VI)}\quad \mathrm{d}\text{ß}'x = \frac{-\mathrm{d}x\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{-\mathrm{d}x\mathfrak{T}'x}{\mathfrak{S}x}$$

$$\text{VII)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{V}x = \mathrm{d}x\mathfrak{S}x$$

$$\text{VIII)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{V}'x = -\mathrm{d}x\mathfrak{S}'x$$

$$\text{IX)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{A}\mathfrak{S}x = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\text{X)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{A}\mathfrak{S}'x = \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\text{XI)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{A}\mathfrak{T}x = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$\text{XII)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{A}\mathfrak{T}'x = \frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$\text{XIII)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{A}\text{ß}x = \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

$$\text{XIV)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{A}\text{ß}'x = \frac{-\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

$$\text{XV)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{A}\mathfrak{V}x = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

$$\text{XVI)}\quad \mathrm{d}\mathfrak{A}\mathfrak{V}'x = \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

Beweis der Formeln.

I. Man differenzire

$$\mathfrak{S}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{\&c.}$$

so

so kömmt

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}x = \mathfrak{d}x\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.\right)$$

oder $\mathfrak{d}\mathfrak{S}x = \mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x$

II. Man differenzire

$$\mathfrak{S}'x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$$

so kömmt

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x = -\mathfrak{d}x\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.\right)$$

oder $\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x = -\mathfrak{d}x\mathfrak{S}x$

III. Weil

$$\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$$

so ist $\mathfrak{d}\mathfrak{T}x = \dfrac{\mathfrak{S}'x \cdot \mathfrak{d}\mathfrak{S}x - \mathfrak{S}x \cdot \mathfrak{d}\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}'x^2}$

Setzet man nun $\mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x$ anstatt $\mathfrak{d}\mathfrak{S}x$, und $-\mathfrak{d}x\mathfrak{S}x$ anstatt $\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x$, so wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x^2 + \mathfrak{d}x \cdot \mathfrak{S}x^2}{\mathfrak{S}'x^2} = \frac{(\mathfrak{S}'x^2 + \mathfrak{S}x^2)\mathfrak{d}x}{\mathfrak{S}'x^2}$$

Es ist aber $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(1 - \mathfrak{S}x^2)}$, folglich $\mathfrak{S}'x^2 = 1 - \mathfrak{S}x^2$, folglich $\mathfrak{S}'x^2 + \mathfrak{S}x^2 = (1 - \mathfrak{S}x^2) + \mathfrak{S}x^2 = 1$. Also wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{S}'x^2}$$

IV. Weil

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}$$

so

$$\text{so ist}\quad d\mathfrak{T}'x = \frac{\mathfrak{S}x\cdot d\mathfrak{S}'x - \mathfrak{S}'x\cdot d\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}x^2}$$

Setzet man $-dx\mathfrak{S}x$ anstatt $d\mathfrak{S}'x$ und $dx\mathfrak{S}'x$ anstatt $d\mathfrak{S}x$, so wird

$$d\mathfrak{T}x = \frac{-\mathfrak{S}x^2dx - \mathfrak{S}'x^2dx}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{-(\mathfrak{S}x^2+\mathfrak{S}'x^2)dx}{\mathfrak{S}x^2}$$

und da bei voriger Formel bewiesen worden, daß $\mathfrak{S}x + \mathfrak{S}'x^2 = 1$, so ist

$$d\mathfrak{T}'x = \frac{-dx}{\mathfrak{S}x^2}$$

V. Weil

$$\text{ß}x = \frac{1}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\text{so ist}\quad d\text{ß}x = \frac{-d\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}'x^2}$$

Man setze $-dx\mathfrak{S}x$ anstatt $d\mathfrak{S}'x$, so wird

$$d\text{ß}x = \frac{+dx\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x^2} = \frac{dx\mathfrak{T}x}{\mathfrak{S}'x}$$

VI. Weil

$$\text{ß}'x = \frac{1}{\mathfrak{S}x}$$

$$\text{so ist}\quad d\text{ß}x = \frac{-d\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{-dx\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{-dx\mathfrak{T}'x}{\mathfrak{S}x}$$

VII. Weil

$$\mathfrak{V}x = 1 - \mathfrak{S}'x$$

$$\text{so ist}\ d\mathfrak{V}x = -d\mathfrak{S}'x$$

und weil $d\mathfrak{S}'x = -dx\mathfrak{S}x$, so wird

$$d\mathfrak{V}x = dx\mathfrak{S}x$$

VIII.

VIII) Weil

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \mathfrak{S}x$$

so ist $\mathrm{d}\mathfrak{V}'x = -\mathrm{d}\mathfrak{S}x$

und weil $\mathrm{d}\mathfrak{S}x = \mathrm{d}x\mathfrak{S}'x$, so ist

$$\mathrm{d}\mathfrak{V}'x = -\mathrm{d}x\mathfrak{S}'x$$

IX) Es ist, vermöge der ersten Formel,

$$\mathrm{d}\mathfrak{S}x = \mathrm{d}x\mathfrak{S}'x$$

daher $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$

Es sey $\mathfrak{S}x = u$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{S}u$, es ist auch $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)} = \sqrt{(1-u^2)}$. Deswegen wird

$$\mathrm{d}\mathfrak{A}\mathfrak{S}u = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

X) Es ist, vermöge der zweiten Formel

$$\mathrm{d}\mathfrak{S}'x = -\mathrm{d}x\mathfrak{S}x$$

daher $\mathrm{d}x = \dfrac{-\mathrm{d}\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}$

Wenn $\mathfrak{S}'x = u$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{S}'u$, und $\mathfrak{S}x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)} = \sqrt{(1-u^2)}$. Denn man hat im Beweise der 3ten und 4ten Formel gesehen, daß $\mathfrak{S}x^2 + \mathfrak{S}'x^2 = 1$, folglich $\mathfrak{S}x^2 = 1 - \mathfrak{S}'x^2$ und $\mathfrak{S}x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}$. Also wird

$$\mathrm{d}\mathfrak{A}\mathfrak{S}'u = \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

XI) Aus der dritten Formel ist

$$\mathrm{d}\mathfrak{T}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathfrak{S}'x^2}$$

folglich $\mathrm{d}x = \mathfrak{S}'x^2\mathrm{d}\mathfrak{T}x$

Es ist aber

$$\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$$

oder $$\mathfrak{T}x = \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\mathfrak{T}x\,\mathfrak{S}'x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}$$

$$\mathfrak{T}x^2\,\mathfrak{S}'x^2 = 1-\mathfrak{S}'x^2$$

$$\mathfrak{T}x^2\,\mathfrak{S}'x^2+\mathfrak{S}'x^2 = 1$$

$$\mathfrak{S}'x^2(\mathfrak{T}x^2+1) = 1$$

$$\mathfrak{S}'x^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{T}x^2}$$

Setzet man diesen Werth von $\mathfrak{S}'x^2$ in die Gleichung

$$dx = \mathfrak{S}'x^2\,d\mathfrak{T}x$$

so ist $$dx = \frac{d\mathfrak{T}x}{1+\mathfrak{T}x^2}$$

Es sey $\mathfrak{T}x = u$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{T}u$, und es wird

$$d\mathfrak{A}\mathfrak{T}u = \frac{du}{1+u^2}$$

XII) Es ist, aus der vierten Formel,

$$d\mathfrak{T}'x = \frac{-dx}{\mathfrak{S}x^2}$$

daher $$dx = -\mathfrak{S}x^2\,d\mathfrak{T}'x$$

Es ist aber

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}$$

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}{\mathfrak{S}x}$$

$$\mathfrak{S}x\,\mathfrak{T}'x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$$

$$\mathfrak{S}x^2\,\mathfrak{T}'x^2 = 1 - \mathfrak{S}x^2$$

$$\mathfrak{S}x^2\,\mathfrak{T}'x^2 + \mathfrak{S}x^2 = 1$$

$$\mathfrak{S}x^2(1+\mathfrak{T}'x^2) = 1$$

$$\mathfrak{S}x^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{T}'x^2}$$

Setzet man diesen Werth von $\mathfrak{S}x^2$ in die Gleichung

$$\mathfrak{d}x = -\mathfrak{S}x^2\,\mathfrak{d}\mathfrak{T}'x$$

so ist $\mathfrak{d}x = \dfrac{-\mathfrak{d}\mathfrak{T}'x}{1+\mathfrak{T}'x^2}$

Es sey $\mathfrak{T}'x = u$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{T}'u$ und es wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{T}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{1+u^2}$$

XIII) Es ist aus der fünften Formel

$$\mathfrak{d}\,\text{ß}x = \frac{\mathfrak{d}x\,\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x^2}$$

daher $\mathfrak{S}'x^2\,\mathfrak{d}\,\text{ß}x = \mathfrak{d}x\,\mathfrak{S}x$

$$\frac{\mathfrak{S}'x^2\,\mathfrak{d}\,\text{ß}x}{\mathfrak{S}x} = \mathfrak{d}x$$

$$\text{Es ist aber } ßx = \frac{1}{S'x}$$

$$\text{daher } S'x ßx = 1$$

$$S'x = \frac{1}{ßx}$$

$$S'x^2 = \frac{1}{ßx^2}$$

$$\text{oder es ist } ßx = \frac{1}{\sqrt{(1 - Sx^2)}}$$

$$ßx^2 = \frac{1}{1 - Sx^2}$$

$$ßx^2 - Sx^2 ßx^2 = 1$$

$$-Sx^2 ßx^2 = 1 - ßx^2$$

$$Sx^2 ßx^2 = ßx^2 - 1$$

$$Sx^2 = \frac{ßx^2 - 1}{ßx^2}$$

$$Sx = \frac{\sqrt{(ßx^2 - 1)}}{ßx}$$

Setzet man die gefundenen Werthe von $S'x^2$ und Sx, in die Gleichung

$$dx = \frac{S'x^2 dßx}{Sx}$$

$$\text{so wird } dx = \frac{ßx\, dßx}{ßx^2 \sqrt{(ßx^2 - 1)}} = \frac{dßx}{ßx\sqrt{(ßx^2-1)}}$$

Ist nun $ßx = u$, so wird $x = Aßu$, und man bekömt

$$dAßx = \frac{du}{u\sqrt{(u^2 - 1)}}$$

XIV)

XIV) Es ist aus der sechsten Formel

$$d\text{ß}'x = \frac{-dx\,\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x^2}$$

daher $\mathfrak{S}x^2 d\text{ß}'x = -dx\,\mathfrak{S}'x$

und $dx = \frac{-\mathfrak{S}x^2 d\text{ß}'x}{\mathfrak{S}'x}$

Es ist aber

$$\text{ß}'x = \frac{1}{\mathfrak{S}x}$$

daher $\mathfrak{S}x = \frac{1}{\text{ß}'x}$

$$\mathfrak{S}x^2 = \frac{1}{\text{ß}'x^2}$$

Es ist auch

$$\text{ß}'x = \frac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}}$$

$$\text{ß}'x^2 = \frac{1}{1-\mathfrak{S}'x^2}$$

$$\text{ß}'x^2 - \mathfrak{S}'x^2\,\text{ß}x^2 = 1$$

$$-\mathfrak{S}'x^2\,\text{ß}x^2 = 1 - \text{ß}'x^2$$

$$\mathfrak{S}'x^2\,\text{ß}x^2 = \text{ß}'x^2 - 1$$

$$\mathfrak{S}'x^2 = \frac{\text{ß}'x^2 - 1}{\text{ß}x^2}$$

$$\mathfrak{S}'x = \frac{\sqrt{(\text{ß}'x^2 - 1)}}{\text{ß}'x}$$

Setzet man die gefundenen Werthe von $\mathfrak{S}x^2$ und $\mathfrak{S}'x$ in die Gleichung

$$\mathrm{d}x = \frac{-\mathfrak{S}x^2\,\mathrm{d}\text{ß}'x}{\mathfrak{S}'x}$$

so wird

$$\mathrm{d}x = \frac{-\text{ß}'x\,\mathrm{d}\text{ß}'x}{\text{ß}'x^2\sqrt{(\text{ß}'x^2-1)}} = \frac{-\mathrm{d}\text{ß}'x}{\text{ß}'x\sqrt{(\text{ß}'x^2-1)}}$$

Es sey $\text{ß}'x = u$, so ist $x = \mathfrak{A}\text{ß}'u$, folglich

$$\mathrm{d}\mathfrak{A}\text{ß}'u = \frac{-\mathrm{d}u}{u\sqrt{(u^2-1)}}$$

XV. Es ist aus der siebenten Formel

$$\mathrm{d}\mathfrak{V}x = \mathrm{d}x\,\mathfrak{S}x$$

daher $$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{V}x}{\mathfrak{S}x}$$

Es ist aber $$\mathfrak{V}x = 1 - \mathfrak{S}'x$$

oder
$$\mathfrak{V}x = 1 - \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$$
$$\mathfrak{V}x - 1 = -\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$$
$$1 - \mathfrak{V}x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$$
$$1 - 2\mathfrak{V}x + \mathfrak{V}x^2 = 1 - \mathfrak{S}x^2$$
$$\mathfrak{S}x^2 = 2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2$$
$$\mathfrak{S}x = \sqrt{(2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}$$

Diesen Werth von $\mathfrak{S}x$ setze man in die Gleichung

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{V}x}{\mathfrak{S}x}$$

so kömmt $$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{V}x}{\sqrt{(2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}}$$

Es sey $\mathfrak{V}x = u$, so ist $x = \mathfrak{AV}u$, und

$$d\mathfrak{AV}u = \frac{du}{\sqrt{(2u - u^2)}}$$

XVI) Es ist, vermöge der achten Formel

$$d\mathfrak{V}'x = -dx\mathfrak{S}'x$$

daher $$dx = \frac{-d\mathfrak{V}'x}{\mathfrak{S}'x}$$

Es ist aber

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \mathfrak{S}x$$

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \sqrt{(1 - \mathfrak{S}'x^2)}$$

$$\sqrt{(1 - \mathfrak{S}'x^2)} = 1 - \mathfrak{V}'x$$

$$1 - \mathfrak{S}'x^2 = 1 - 2\mathfrak{V}'x + \mathfrak{V}'x^2$$

$$2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2 = \mathfrak{S}'x^2$$

$$\sqrt{(2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}'x^2)} = \mathfrak{S}'x$$

Setzet man diesen Werth von $\mathfrak{S}'x$ in die Gleichung

$$dx = \frac{-d\mathfrak{V}x}{\mathfrak{S}'x}$$

so ist $$dx = \frac{-d\mathfrak{V}'x}{\sqrt{(2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}x^2)}}$$

Es sey $\mathfrak{V}'x = u$, so ist $x = \mathfrak{AV}'u$, folglich

$$d\mathfrak{AV}'u = \frac{-du}{\sqrt{(2u - u^2)}}$$

§. 7.

Alle vorhergehende Differenziale haben einen großen Nutzen in algebraischen Rechnungen, weil entweder in der Funk-

Funkzion oder in deren Differenziale unendliche Reihen auf einer sehr kurzen Art ausgedrücket werden. Uebrigens pfleget man solche Größen, welche eigentlich unendliche Reihen vorstellen, als Sx, ASx, u. s. f. transzendente Größen zu nennen. Dahin rechnet man auch die Logarithmen, welche, wie wir im vorigen Hauptstücke gesehen haben, durch unendliche Reihen ausgedrücket werden. In diesem Verstande wären binomische oder polynomische Größen mit gebrochenen Exponenten auch transzendent, weil sie nicht anders als durch unendliche Reihen entwickelt werden können. Es scheinet überhaupt eine transzendente Größe in der Algebra eine jede Größe zu seyn, deren Werth nie ganz rein ausgedrücket, sondern nur durch eine Näherung ohne Ende gefunden wird.

Zwanzigstes Hauptstück.

Von der Integral-Rechnung, oder von der Erfindung der Funkzionen aus ihren Differenzialen.

§. 1.

Im XIV. Hauptstücke haben wir gelehret, wie aus der endlichen oder vollständigen Differenz einer Funkzion, die Funkzion selbst gefunden werden kann. Hier muß gezeiget werden, wie die Funkzion aus ihrer unvollständigen oder unendlich kleinen Differenz zu erforschen ist. Das gegebene Differenzial nennet man manchmal das Element der gesuchten Funkzion, und diese ist das Integral. Die Rechnung selbst, wodurch das Integral gefunden wird, heißt die Integral-Rechnung.

§. 2.

Das gesuchte Integral pfleget man durch den Buchstaben $\int$ anzudeuten. Also bedeutet zum Exempel dieser Ausdruck

$$\int \frac{a\,dx}{(p+qx)^n}$$

daß man eine Funkzion von x suchen soll, deren Differenzial

$$\frac{a\,dx}{(p+qx)^n}$$

sey. Dem Anfänger zu Gefallen, der dieses $\int$ für eine Größe ansehen könnte, da es doch ein bloßes Zeichen ist, wollen

wollen wir uns lieber des deutschen ſ bedienen. Wir werden also schreiben

$$\int \frac{adx}{(p+qx)^n}$$

§. 3.

In der Integral-Rechnung kommen viel verschiedene Fälle in Betrachtung. Denn es kann die gegebene Funkzion entweder nur eine, oder mehr als eine veränderliche Größe enthalten. Es kann auch die gegebene Funkzion entweder von der ersten oder von einer höheren Differenzial-Ordnung seyn. Es kann ferner die Funkzion ganz oder gebrochen, razional oder irrazional seyn. Sie kann logarithmische Größen oder Zirkelgrößen enthalten. Wenn wir alle diese verschiedene Fälle und die Aufgaben die daraus entstehen, untersuchen wollten, so wäre ein Buch, wie diese ganze Anweisung zur Algebra, kaum hinreichend. Ueberdem ist die Integral-Rechnung bisher noch keine vollständige Kunst, sondern sie bestehet meistens in mehr oder weniger glücklichen Versuchen, welche verschiedene große Mathematiker gemachet haben, um die dahin einschlagenden Aufgaben aufzulösen. Wir müssen uns also damit begnügen, daß wir in diesem Hauptstücke dasjenige vortragen, was zum weiteren Fortgange in der Mathematik unentbehrlich ist. Wenn jemand nur so weit gekommen ist, daß er allerlei mathematische Schriften verstehen kann, so wird er auch nach und nach die besonderen Kunstgriffe der Mathematiker bei der Auflösung schwerer Aufgaben kennen und nachahmen lernen.

§. 4.

Aufgabe.

Eine Differenzial-Funkzion von einer einzigen veränderlichen Größe integriren.

Auflö-

Auflösung. Hierzu dienen folgende Formeln.

Differenzial-Funkzionen.	Deren Integrale.
I) $\mathrm{d}x$	$x + c$
II) $a\,\mathrm{d}x$	$ax + c$
III) $x^n\,\mathrm{d}x$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
IV) $(a+x)^n\,\mathrm{d}x$	$\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} + c$
V) $(a+bx)^n\,\mathrm{d}x$	$\frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + c$
VI) $\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)^n}$	$\frac{-1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}} + c$
VII) $\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$l\,x + c$
VIII) $\frac{\mathrm{d}x}{a+x}$	$l(a+x) + c$
IX) $\frac{\mathrm{d}x}{a+bx}$	$\frac{1}{b} l \frac{a+bx}{b} + c = \frac{1}{b} l \frac{a+bx}{c}$
X) $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$l[x+\sqrt{(a^2+x^2)}] + c$
XI) $\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$\frac{1}{2a} l \frac{-a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{+a+\sqrt{(a^2+x^2)}} + c$
XII) $\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$\frac{1}{2a} l \frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}} + c$
XIII) $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$\mathfrak{AS}\frac{x}{a} + c = -\mathfrak{AS}'\frac{x}{a} + c$

Differenzial-Funkzionen.	Deren Integrale.
XIV) $\frac{\mathfrak{d}x}{a^2+x^2}$: : :	$\frac{1}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{T}\frac{x}{a}+c=-\frac{1}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{T}'\frac{x}{a}+c$
XV) $\frac{\mathfrak{d}x}{\sqrt{x(x^2-a^2)}}$:	$\frac{1}{a}\mathfrak{A}\text{ß}\frac{x}{a}+c=-\frac{1}{a}\mathfrak{A}\text{ß}'\frac{x}{a}+c$
XVI) $\frac{\mathfrak{d}x}{\sqrt{(ax-x^2)}}$:	$\mathfrak{A}\mathfrak{V}\frac{2x}{a}+c=-\mathfrak{A}\mathfrak{V}'\frac{2x}{a}+c$
XVII) $\frac{\mathfrak{d}x}{x\,\mathrm{l}x}$: : :	$\mathrm{l}\mathrm{l}x+c$
XVIII) $\frac{\mathfrak{d}x}{x\,\mathrm{l}x\,\mathrm{l}\mathrm{l}x}$: :	$\mathrm{l}\mathrm{l}\mathrm{l}x+c$
XIX) $\frac{\mathfrak{d}x}{x\,\mathrm{l}x\,\mathrm{l}^2x\ldots\mathrm{l}^nx}$:	$\mathrm{l}^{n+1}x+c$
XX) $\frac{\mathfrak{d}x(\mathrm{l}x)^n}{x}$: :	$\frac{(\mathrm{l}x)^{n+1}}{n+1}+c$
XXI) $\frac{\mathfrak{d}x(\mathrm{l}\mathrm{l}x)^n}{x\,\mathrm{l}x}$: :	$\frac{(\mathrm{l}\mathrm{l}x)^{n+1}}{n+1}+c$
XXII) $\frac{\mathfrak{d}x(\mathrm{l}^mx)^n}{x\,\mathrm{l}x\,\mathrm{l}^2x\ldots\mathrm{l}^{m-1}x}$:	$\frac{(\mathrm{l}^mx)^{n+1}}{n+1}+c$
XXIII) $e^x\mathfrak{d}x$: : :	e^x+c
XXIV) $a^x\mathfrak{d}x$: : :	$\frac{a^x}{\mathrm{l}a}+c$
XXV) $\mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x$: :	$\mathfrak{S}x+c=-\mathfrak{V}'x+c$
XXVI) $\mathfrak{d}x\mathfrak{S}x$: :	$-\mathfrak{S}'x+c=\mathfrak{V}x+c$
XXVII) $\frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{S}'x^2}$: :	$\mathfrak{T}x+c$

Differenzial-Funkzionen.	Deren Integrale.
XXVIII) $\frac{dx}{\mathfrak{S}x^2}$: :	$-\mathfrak{T}'x + c$
XXIX) $\frac{dx\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x^2} = \frac{dx\mathfrak{T}x}{\mathfrak{S}'x}$	$\text{ß}x + c$
XXX) $\frac{dx\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{dx\mathfrak{T}'x}{\mathfrak{S}x}$	$-\text{ß}x + c$

Beweis. Anstatt jede Formel besonders zu beweisen, wollen wir nur überhaupt bemerken, daß die Differenzial-Funkzion in der Kolumne zur Linken allemal entstehen muß, wenn man die Funkzion welche zur Rechten gegen über stehet, gehörig differenziret. Durch dieses Mittel kann sich der Leser die Formeln alle nach einander selbst beweisen. Auch werden einige derselben bei den folgenden Aufgaben noch besonders erkläret werden.

Zusatz I. Die Größe c, welche jedem Integrale beigefüget ist, ist die willkürliche beständige Größe, wovon schon im XV. Hauptst. §. 9 und §. 10 gesprochen worden.

Zusatz II. Wenn die Differenzial-Formel noch mit beständigen Größen multipliziret oder dividiret ist, so muß auch das Integral ebenfalls multipliziret oder dividiret werden. Zum Exempel es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} = l\,[x + \sqrt{(ax + x^2)}] + c$$

folglich wird seyn

$$\int \frac{p dx}{q\sqrt{(a^2 + x^2)}} = \frac{p}{q} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} = \frac{p}{q}\, l\,[x + \sqrt{(a^2 + x^2)}] + c$$

Siehe das XV. Hauptst. §. 5.

Zusatz III.

Zusatz III. Wenn die gegebene Differenzial-Funkzion mehrere Sätze enthält, so wird jeder Satz insbesondere integriret (XV. Hauptstück §. 4). Zum Exempel

$$\int\left((1+x)^3\, dx + \frac{a\,dx}{a^2+x^2} + \frac{b\,dx}{a+x}\right)$$

$$= \int(1+x)^3\, dx + a\int\frac{dx}{a^2+x_2} + b\int\frac{dx}{a+x}$$

$$= \frac{(1+x)^4}{4} + \mathfrak{A}\mathfrak{T}\frac{x}{a} + b\,l(a+x) + c$$

Zusatz IV. Wenn die gegebene Funkzion ein Bruch ist, der sich in mehrere Brüche zertheilen läßt, (XIII. Hauptst. §. 16) so verrichte man diese Zertheilung, und integrire jeden Theil insbesondere. Z. E. Es sey zu integriren

$$\frac{dx + 2x\,dx + 3x^2\,dx}{-6-5x+2x^2+x^3} = \frac{(1+2x+3x^2)\,dx}{-6-5x+2x^2+x^3}$$

Dieser Ausdruck bestehet aus folgenden Brüchen (XIII. Hauptst. §. 16. Exempel I.)

$$\frac{dx}{3(x+1)} + \frac{17\,dx}{15(x-2)} + \frac{11\,dx}{5(x+3)}$$

Und hiervon ist das Integral

$$\frac{l(1+x)}{3} + \frac{17\,l(x-2)}{15} + \frac{11\,l(x+3)}{5}$$

Zusatz V. Wenn keine Formeln auf eine gegebene Differenzial-Funkzion passen wollen, so verwandele man die Funkzion in eine unendliche Reihe. Zum Exempel es soll integriret werden

$$\frac{4x\,dx}{3+2x+5x^2}$$

Die-

Dieser Ausdruck verwandelt sich in folgende Reihe (XIII. Hauptst. §. 17. Exemp. I.)

$$\frac{4}{3}x\,dx-\frac{8}{9}x^2dx-\frac{44}{27}x^3dx+\frac{208}{81}x^4dx+\frac{244}{243}x^5dx+\&c.$$

Hiervon ist das Integral

$$\frac{4}{3}.\frac{x^2}{2}-\frac{8}{9}.\frac{x^3}{3}-\frac{44}{27}.\frac{x^4}{4}+\frac{208}{81}.\frac{x^5}{5}+\frac{244}{243}.\frac{x^6}{6}+\&c.$$

oder

$$\frac{2x^2}{3}-\frac{8x^3}{27}-\frac{11x^4}{27}+\frac{208x^5}{405}+\frac{122x^6}{729}+\&c.$$

Also ist

$$\int\frac{4x\,dx}{3+2x+5x^2}=\frac{2x^2}{3}-\frac{8x^3}{27}-\frac{11x^4}{27}+\frac{208x^5}{405}+\&c.$$

Zusatz VI. In einer Gleichung wird jeder Satz oder jedes Glied für sich integriret. Z. E. Es soll diese Gleichung integriret werden

$$2dx-\frac{dx}{(1+5x)^3}=\frac{6dx}{Sx^2}-\frac{2dx}{3xlx}$$

so bekömmt man, wenn man Satz für Satz integriret

$$2x+\frac{1}{10(1+5x)^2}=-6T'x-\frac{2llx}{3}+c$$

Anmerkung I. Wir haben in der 19ten und in der 22ten Formel den Ausdruck $l^n x$ gebrauchet. Dadurch verstehen wir, daß l so vielmahl geschrieben werden soll, als n Einheiten hat. Z. E. l^3x heißt $lllx$, das ist, man soll von x den natürlichen Logarithmus nehmen, hernach wiederum den natürlichen Logarithmus der gefundenen Größe, und nochmal den natürlichen Logarithmus der lezt gefundenen Größe.

Anmer-

Anmerkung II. Obgleich die Formeln, welche im Anfange dieses Paragraphs gegeben worden, schon für viele Fälle hinreichend sind, so verdienen doch einige Differenzial-Funkzionen noch besonders betrachtet zu werden, hauptsächlich die irrazionalen, logarithmischen, und diejenigen welche Zirkelgrößen enthalten.

§. 5.

Aufgabe.

Eine irrazionale Differenzial-Funkzion einer veränderlichen Größe integriren.

Auflösung. Eine solche Funkzion kann allemal in eine unendliche Reihe verwandelt, und alsdenn jeder Satz besonders integriret, werden. Jedoch giebt es Fälle, wo eine irrazionale Funkzion durch endliche Größen integriret werden kann. Man muß versuchen, die Funkzion razional zu machen, indem man eine andere veränderliche Größe als die gegebene unterschiebet. Zum Exempel eine Formel die ziemlich häufig vorfällt, ist diese

$$x^m (a + bx^r)^s dx$$

Hier kann man auf zweierlei Art versuchen, die Funkzion razional zu machen.

Man nehme an, es sey

$a + bx^r = u$

so ist $bx^r = u - a$

$$x^r = \frac{u-a}{b}$$

$$x = \frac{(u-a)^{\frac{1}{r}}}{b^{\frac{1}{r}}} \text{ und } x^m = \frac{(u-a)^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{m}{r}}}$$

$$dx = \frac{\frac{1}{r}(u-a)^{\frac{1}{r}-1} du}{b^{\frac{1}{r}}} = \frac{du(u-a)^{\frac{1}{r}-1}}{rb^{\frac{1}{r}}}$$

Sezet

Setzet man nun die Werthe von $a+bx^r$, von x^m und von $\mathrm{d}x$ in die gegebene Funkzion, so entstehet

$$\frac{(u-a)^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{m}{r}}} \cdot u^s \cdot \frac{\mathrm{d}u(u-a)^{\frac{1}{r}-1}}{rb^{\frac{1}{r}}}$$

oder $$\frac{1}{rb^{\frac{m+1}{r}}} \cdot u^s \mathrm{d}u (u-a)^{\frac{m+1}{r}-1}$$

Diese neue Formel wird allemal razional, wenn $\frac{m+1}{r}$ und folglich auch $\frac{m+1}{r}-1$ eine ganze Zahl ist. Es sey gegeben

$$3x^3 \mathrm{d}x \sqrt{(1+x^2)}$$

oder $$3x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

so ist hier $m=3$, $r=2$, folglich $\frac{m+1}{r}=\frac{4}{2}=2$, und $\frac{m+1}{r}-1=1$, also kann das gegebene Differenzial razional gemachet werden. Es ist ferner $s=\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=1$. Setzet man alle diese Werthe in die Formel, so kömt anstatt $x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u(u-1)$$

oder $$\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}u - \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}u$$

und wenn man integriret

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

oder $$\frac{1}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

Multipliziret man nun noch mit dem Koeffizienten 3 der im gegebenen Differenziale ist, und setzet eine beständige Größe zu, so bekömt man

$$\frac{3}{5} u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{3}{2}} + c$$

oder wenn man anstatt u wiederum dessen Werth $1+x^2$ setzet,

$$\frac{3}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} - (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

oder $$\frac{3}{5} \sqrt{(1+x^2)^5} - \sqrt{(1+x^2)^3} + c$$

Die nemliche Formel

$$x^m (a+bx^r)^s \, dx$$

kann noch auf eine andere Art razional gemacht werden. Wenn man $a+bx^r$ durch x^r dividiret und dann wiederum durch x^r multipliziret, so wird $a+bx^r = x^r(ax^{-r}+b)$, und $(a+bx^r)^s = x^{rs}(ax^{-r}+b)^s$. Multipliziret man nun mit $x^m dx$, so kömt

$$x^m (a+bx^r)^s \, dx = x^{m+rs} (ax^{-r}+b)^s \, dx$$

Nun nehme man an, es sey

$$ax^{-r}+b = u$$

und mache ähnliche Verrichtungen, wie bei voriger Methode, so bekömt man

$$\frac{-1}{ra^{-\left(\frac{m+1}{r}+s\right)}} u^s \, du \, (u-b)^{-\left(\frac{m+1}{r}+s+1\right)}$$

Wenn

Wenn man nun diese Formel integriren kann, so bekömt man eine Funkzion des u, in welcher man wiederum $ax^{-r}+b$ anstatt u setzen muß. Diese Formel ist bequem, wenn der Exponent $-\left(\frac{m+1}{r}+s+1\right)$ eine ganze positive Zahl oder auch null wird. Es sey zu integriren

$$\frac{5\,\partial x\sqrt{(1+x^2)}}{x^6}=5.x^{-6}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\partial x$$

Hier ist $m=-6$, $r=2$, $s=\frac{1}{2}$, folglich

$$-\left(\frac{m+1}{r}+s+1\right)=-\left(\frac{-6+1}{2}+\tfrac{1}{2}+1\right)$$
$$=-\left(\frac{-5}{2}+\tfrac{1}{2}+1\right)$$
$$=-\left(\frac{-4}{2}+1\right)$$
$$=-(-2+1)$$
$$=+2-1$$
$$=1$$

ferner ist $a=1$, und $b=1$

Setzet man nun diese Werthe in die gefundene Funkzion von u, so hat man

$$-\frac{1}{2}\cdot u^{\frac{1}{2}}\partial u\,(u-1)^1$$

oder $-\frac{1}{2}\cdot u^{\frac{3}{2}}\partial u+\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\partial u$

Hiervon ist das Integral

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

oder $-\frac{1}{5}\cdot u^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}$

Multipliziret man noch mit dem gegebenen Koeffizienten 5, und setzet die willkührliche Größe zu, so wird das Integral

$$-u^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

oder weil $u=ax^{-r}+b=1x^{-2}+1=\frac{1}{x^2}+1$

$$-\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

oder $-\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+c$

oder $-\frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{x^5}+\frac{5}{3}\cdot\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+c$

oder $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^5}+\frac{5\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+c$

§. 6.

Aufgabe.

Eine logarithmische Funkzion von x integriren.

Auflösung. Man kann die Funkzion in eine unendliche Reihe verwandeln, und dann jeden Satz integriren. Es sey zum Exempel zu integriren.

$$\frac{\partial x}{1-x}\,lx \text{ oder } -\frac{\partial x}{x-1}\,lx$$

Man

Man weiß, daß

$$lx = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \&c.$$

$$\text{folgl. } \frac{lx}{x-1} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} + \&c.$$

$$-\frac{dx}{x-1}lx = -dx + \frac{(x-1)dx}{2} - \frac{(x-1)^2 dx}{3} + \frac{(x-1)^3 dx}{4} - \&c.$$

Man setze $x - 1 = z$, so ist $dx = dz$, und

$$-\frac{dx}{x-1}lx = -dz + \frac{zdz}{2} - \frac{z^2dz}{3} + \frac{z^3dz}{4} - \&c.$$

$$\text{folgl. } -\int\frac{dx}{x-1}lx \text{ oder } \int\frac{dx}{1-x}lx = C - z + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} - \&c.$$

Will man, daß dieses Integral null werde, wenn $x = 0$, folglich $z = -1$, so wird $C = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \&c.$ und man bekömt

$$\int\frac{dx}{1-x}lx = -(x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^3}{9} + \frac{(x-1)^4}{16} - \&c.$$

$$-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \&c.$$

Jedoch giebt es Fälle, wo man auch ohne unendliche Reihen integriren kann, wenn man nur die Formel auf eine geschickte Art verändert.

Es sey aufgegeben eine solche Formel

$$p\,dx\,lq$$

wo p und q algebraische Funkzionen von x sind, das ist, solche Funkzionen, worinn keine transzendente Größen enthalten sind. Man beobachte daß

$$\int p\,dx\,lq = lq\int p\,dx - \int(d\,lq . \int p\,dx)$$

$$= lq\int p\,dx - \int\frac{dq}{q}\int p\,dx$$

 Denn

Denn es ist überhaupt

$$\int Q p \, dx = Q \int p \, dx - \int (dQ \int p \, dx)$$

wie man es findet, wenn man beiderseits differenziret, denn so kömmt

$$Q p \, dx = Q p \, dx + dQ \int p \, dx - dQ \int p \, dx$$

oder $Q p \, dx = Q p \, dx$

Gesetzet also, man habe $p \, dx$ integriret, und das gefundene Integral sey V, so ist

$$\int p \, dx \, lq = lq \int p \, dx - \int \frac{dq}{q} \int p \, dx$$

$$= lq \, . \, V - \int \frac{V dq}{q}$$

Findet es sich nun, daß $\frac{V dq}{q}$ eine algebraische Funkzion ist, die sich durch endliche Größen integriren läßt, so bekömmt man das verlangete Integral in endlichen Ausdrücken. Es sey zu integriren

$$x^n \, dx \, lx$$

Hier ist $p = x^n$, und $q = x$, folglich V oder $\int p \, dx$ $= \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ und $\int \frac{V dq}{q} = \int \frac{x^n \, dx}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.

Daher ist

$$\int x^n \, dx \, lx = \frac{x^{n+1}}{n+1} lx - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(lx - \frac{1}{n+1} \right) + c$$

In dem Falle, wo $n = -1$, wird $x^n dx lx = \frac{dx lx}{x}$ und dann wird die Summe aus der 20sten Formel des 4ten Paragraphs $\frac{1}{2} (lx)^2 + c$.

Zusatz.

Zusatz. Zur gegenwärtigen Aufgabe gehören noch einige andere Formeln des 4ten Paragraphs, nemlich von der 17ten bis zur 22ten, welche wir hier erläutern wollen.

Es sey zu differenziren llx, so setze man anfänglich $lx = z$, folglich $llx = lz$, und $dllx = dlz = \frac{dz}{z}$. Weil nun $z = lx$, so ist $dz = \frac{dx}{x}$, setzet man diesen Werth von dz in die Gleichung

$$dlz = \frac{dz}{z}$$

so ist $$dlz = \frac{dx}{xz}$$

und weil $z = lx$, so wird

$$dllx = \frac{dx}{xlx}$$

folglich ist $$llx = \int \frac{dx}{xlx}$$

Es sey zu differenziren $lllx$, so setze man $llx = z$, folglich ist

$$lllx = lz$$

$$dlllx = \frac{dz}{z}$$

Weil aber $dz = llx$, so ist, aus vorigem Beweise $dz = \frac{dx}{xlx}$, folglich

$$dlllx = \frac{dz}{z} = \frac{dx}{xlx.z} = \frac{dx}{xlxllx}$$

folglich $$lllx = \int \frac{dx}{xlxllx}$$

Wenn man so fortfähret, so wird man die allgemeine Regel wahrnehmen, welche in der 19ten Formel des 4ten Paragraphs enthalten ist.

Es sey zu differenziren $(lx)^n$, so setze man $lx = z$, folglich

$$(lx)^n = z^n$$
$$d(lx)^n = nz^{n-1}dz$$

Weil nun $z = lx =$ so ist $dz = \frac{dx}{x}$, folglich wird

$$d(lx)^n = \frac{n(lx)^{n-1}dx}{x}$$

folglich $$(lx)^n = n\int\frac{dx(lx)^{n-1}}{x}$$

$$\frac{(lx)^n}{n} = \int\frac{dx(lx)^{n-1}}{x}$$

Es sey $n - 1 = m$, so wird $n = m + 1$, und

$$\frac{(lx)^{m+1}}{m+1} = \int\frac{dx(lx)^m}{x}$$

Es sey ferner zu differenziren $(llx)^n$, so setze man $llx = z$, folglich

$$(llx)^n = z^n$$
$$d(llx)^n = nz^{n-1}dz$$

Weil aber $z = llx$, so ist, vermöge der obigen Beweise $dz = \frac{dx}{xlx}$, und es wird

$$d(llx)^n = \frac{n(llx)^{n-1}dx}{xlx}$$

folglich $$(llx)^n = n\int\frac{(llx)^{n-1}dx}{xlx}$$

oder $$\frac{(llx)^n}{n} = \int\frac{dx(llx)^{n-1}}{xlx}$$

Es sey $n - 1 = m$, so ist $n = m + 1$, und

$$\frac{(l\,l\,x)^{m+1}}{m+1} = \int \frac{dx\,(l\,l\,x)^m}{x\,l\,x}$$

Wenn man so weiter gehet, so wird man die Regel wahrnehmen, die in der 22ten Formel enthalten ist.

§. 7.

Aufgabe.

Eine Exponenzial-Funkzion von x integriren.

Auflösung. Eine Exponenzialgröße kann allemal in eine unendliche Reihe verwandelt werden, und dann läßt sich jeder Saz für sich integriren.

I) Es sey gegeben zu integriren $x^x\,dx$, so nehme man an $x = 1 + y$, welches giebet $dx = dy$, und folglich

$$x^x\,dx = (1+y)^{1+y}\,dy$$

Es sey ferner $(1+y)^{1+y} = 1 + v$

so ist $(1+y)\,l(1+y) = l(1+v)$

man entwickele nun $l(1+y)$ und $l(1+v)$ wie im XVIII. Hauptstücke §. 9 gelehret worden, so kömmt

$$y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \&c. = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \&c.$$

Man nehme nun an, es sey

$$v = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$$

man seze diese Reihe und deren Potenzen in der lezten Gleichung anstatt y und dessen Potenzen, man vergleiche die Koeffizienten, so wird man finden

$$A = 1$$
$$B = 1$$
$$C = \tfrac{1}{2}$$
$$D = \tfrac{1}{3}$$
&c. &c.

Folglich wird

$$v = y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{3}y^4 + \&c.$$

$$(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{3}y^4 + \&c.$$

$$(1+y)^{1+y}dy = dy + ydy + y^2dy + \tfrac{1}{2}y^3dy + \tfrac{1}{3}y^4dy + \&c.$$

und wenn man alle Säße integriret

$$\int(1+y)^{1+y}dy = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} + \&c.$$

Es ist aber $1+y=x$, folglich $y=x-1$, und $dy=dx$, folglich

$$\int x^x dx = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{8} + \frac{(x-1)^5}{15} + \&c. \ldots + c$$

und also ist das verlangete Integral durch eine unendliche Reihe ausgedrücket. Wenn $x-1$ eine kleine Quantität ist, so nehmen die Säße schnell ab, und die lezten können ohne Gefahr weggelaßen werden.

II. Es sey zu integriren $e^x dx$, so bekömmt man

$$\int e^x dx = e^x + c = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \&c. \ldots + c$$

Man kann auch, bevor man integriret, das e^x entwickeln, und dann wird

$$e^x dx = dx + xdx + \frac{x^2dx}{1.2} + \frac{x^3dx}{1.2.3} + \&c.$$

$$\int e^x dx = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c. + c$$

Hier fehlet 1 womit die Reihe anfangen soll. Diese 1 ist aber in der beständigen Größe c mit einbegriffen.

Wenn das e^x noch durch eine andere Funkzion von x multipliziret oder dividiret ist, so muß alles vor der Integrazion

grazion entwickelt werden. Es sey zu integriren $e^x x^n \partial x$, so ist

$$e^x x^n = x^n + x^{n+1} + \frac{x^{n+2}}{1.2} + \frac{x^{n+3}}{1.2.3} + \&c.$$

$$e^x x^n \partial x = x^n \partial x + x^{n+1} \partial x + \frac{x^{n+2} \partial x}{1.2} + \frac{x^{n+3} \partial x}{1.2.3}$$

daher

$$\int e^x x^n \partial x = c + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+3}}{1.2(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{1.2.3(n+4)} + \&c.$$

Es sey verlanget $\int e^{a+x} \partial x$, so ist dieses $= \int e^a e^x \partial x = e^a \int e^x \partial x = e^a e^x + c = e^{a+x} + c.$

Es sey verlanget $\int e^{ax} \partial x$, so nehme man an $ax = z$, folglich $a \partial x = \partial z$, $\partial x = \frac{\partial z}{a}$, und $\int e^{ax} \partial x = \int \frac{e^z \partial z}{a}$ $= \frac{e^z}{a} + c = \frac{e^{ax}}{a} + c$

III. $\int a^x \partial x = \frac{a^x}{\mathrm{l}a} + c$, denn man nehme an

$$a^x = z$$

so wird $x \,\mathrm{l}a = \mathrm{l}z$

$$\partial x \,\mathrm{l}a = \frac{\partial z}{z}$$

$$z \,\partial x \,\mathrm{l}a = \partial z$$

$$a^x \partial x \,\mathrm{l}a = \partial (a^x)$$

$$a^x \partial x = \frac{\partial (a^x)}{\mathrm{l}a}$$

$$\int a^x \partial x = \frac{a^x}{\mathrm{l}a}$$

Es

Es ist aber

$$a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3}$$

folgl. $\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + c = \frac{1}{la} + x + \frac{x^2 la}{1.2} + \frac{x^3(la)^2}{1.2.3} + \&c. + c$

Entwickelt man a^x vor der Integrazion, so ist

$$a^x dx = dx + x\,la\,dx + \frac{x^2(la^2)dx}{1.2} + \frac{x^3(la)^3 dx}{1.2.3} + \&c.$$

$$\int a^x dx = x + \frac{x^2 la}{1.2} + \frac{x^3(la)^2}{1.2.3} + \frac{x^4(la)^3}{1.2.3} + \&c. + c$$

In dieser Reihe fehlet $\frac{1}{la}$ welches aber in der beständigen Größe c mit einbegriffen ist.

Es sey verlanget $\int x^n a^{(x^r)} dx$. Man nehme an $x^r = z$, so ist $x = z^{\frac{1}{r}}$, $x^n = z^{\frac{n}{r}}$, $dx = \frac{1}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz$

$$\text{folglich} \qquad \int x^n a^{(x^r)} dx = \int z^{\frac{n}{r}} a^z \frac{1}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz$$

$$= \frac{1}{r} \int z^{\frac{n+1}{r}-1} a^z dz$$

Man entwickele a^z, und multiplizire mit $z^{\frac{n+1}{r}-1} dz$, so werden sich die Sätze, jeder für sich integriren lassen, und man braucht nur zulezt wiederum x^r anstatt z zu schreiben. Oder man entwickele sogleich $a^{(x^r)}$, so ist

$$a^{(x^r)} = 1 + x^r la + \frac{x^{2r}(la)^2}{1.2} + \frac{x^{3r}(la)^3}{1.2.3} + \&c.$$

$$x^n a^{(x^r)} dx = x^n dx + x^{r+n} dx\,la + \frac{x^{2r+n}(la)^2 dx}{1.\;2} + \&c.$$

folgl. $\int x^n a^{(x^r)} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{r+n+1} la}{r+n+1} + \frac{x^{2r+n+1}(la)^2}{1.2.(2r+n+1)} + \&c. + c$

Wir

Wir wollen die Exempel nicht anhäufen. Man siehet daß alles entweder auf eine geschickte Substitution neuer veränderlichen Größen, oder auf die Entwickelung der Exponenzialgrößen ankömt.

§. 8.

Aufgabe.

Eine Funkzion von x integriren, worin Zirkelgrößen vorkommen.

Auflösung. Die Zirkelgrößen stellen eigentlich unendliche Reihen vor (XIX Hauptst. §. 2). Sie können folglich allemal wieder in unendliche Reihen verwandelt werden, und dann lassen sich die Sätze jeder für sich integriren. Jedoch giebt es manche Fälle, wo die Integrazion durch endliche Größen geschehen kann. Dergleichen sind die Formeln 25, 26, 27, 28, 29, 30 im 4ten Paragraph. Wir wollen noch einen Fall anführen.

Es sey zu integriren $p\,dx\,\mathfrak{A}\mathfrak{S}x$, wo p eine algebraische Funkzion von x vorstellet. Man bekömt anfänglich, vermittelst einer solchen Veränderung, wie im §. 6. geschehen

$$\int p\,dx\,\mathfrak{A}\mathfrak{S}x = \mathfrak{A}\mathfrak{S}x \int p\,dx - \int d\mathfrak{A}\mathfrak{S}x \int p\,dx$$

oder wenn wir annehmen $\int p\,dx = V$, so wird

$$\int p\,dx\,\mathfrak{A}\mathfrak{S}x = V\mathfrak{A}\mathfrak{S}x - \int V\,d\mathfrak{A}\mathfrak{S}x$$

und weil $d\mathfrak{A}\mathfrak{S}x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, so ist

$$\int p\,dx\,\mathfrak{A}\mathfrak{S}x = V\mathfrak{A}\mathfrak{S}x - \int \frac{V\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

Trift es sich nun, daß $\frac{V\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ durch einen endlichen Ausdruck integriret werden kann, so braucht man keine unendliche Reihen.

Durch

Durch ähnliche Folgerungen findet man

$$\int p\,\partial x\,\mathfrak{A}\mathfrak{S}'x = V\mathfrak{A}\mathfrak{S}'x + \int \frac{V\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int p\,\partial x\,\mathfrak{A}\mathfrak{T}x = V\mathfrak{A}\mathfrak{T}x - \int \frac{V\partial x}{1+x^2}$$

&c. &c.

Das V stellet in diesen Formeln allemal $\int p\,\partial x$ vor.

§. 9.

Aufgabe.

Eine Differenzialgleichung von der ersten Ordnung und von zwei veränderlichen Größen integriren.

Auflösung. Es seyen die zwei veränderlichen Größen x und y. Man setze, es sey $y=ux$, so wird die gegebene Gleichung, wenn sie homogen ist, sich so verwandeln, daß man in einem Gliede $\frac{\partial x}{x}$ und in dem andern eine Funkzion von u bekömt, und alsdenn kann man beiderseits nach vorhergehenden Regeln integriren.

Exempel. Es sey

$$(x^2+xy)\,\partial y = y^2\,\partial x$$

oder

$$\partial y = \frac{y^2}{x^2+xy}\,\partial x$$

Man nehme an $y=ux$, so ist $\partial y = u\partial x + x\partial u$, und es wird

$$u\partial x + x\partial u = \frac{u^2x^2}{x^2+ux^2}\,\partial x$$

oder $u\partial x + x\partial u = \dfrac{u^2}{1+u}\,\partial x$

oder

oder $\left(u - \frac{u^2}{1+u}\right) \mathrm{d}x = - x\,\mathrm{d}u$

oder $\frac{u}{1+u}\mathrm{d}x = - x\,\mathrm{d}u$

daher $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-(1+u)\mathrm{d}u}{u}$

oder $\frac{\mathrm{d}x}{x} = - \frac{\mathrm{d}u}{u} - \mathrm{d}u$

daher $lx = - lu - u$

oder weil $u = \frac{y}{x}$, so ist

$$lx = - l\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$$

und weil $l\frac{y}{x} = ly - lx$, so ist

$$lx = - ly + lx - \frac{y}{x}$$

$$0 = - ly - \frac{y}{x}$$

$$x\,ly = - y$$

$$x = - \frac{y}{ly} + c$$

Und dieses ist die verlangte Integralgleichung. Man versuche dieselbe zu differenziren, so wird das Gegebene, nemlich $(x^2 + xy)\mathrm{d}y = y^2\,\mathrm{d}x$, wieder herauskommen.

Eine andere Auflösung. Man bringe in der gegebenen Gleichung alles auf einer Seite, so daß die Gleichung annulliret sey. Man versuche, ob das geltende

Glied

Glied ein richtiges Differenzial ausmachet, oder ob $\frac{M}{\partial x} = \frac{N}{\partial y}$, wenn nemlich gegeben ist $M\partial y + N\partial x = 0$ (Siehe XVI Hauptst. §. 30). Findet es sich, daß das Differenzial richtig ist, so integrire man anfänglich in Betrachtung der einen veränderlichen Größe y allein, und setze das verlangte Integral sey dem gefundenen gleich, wenn man noch eine Funkzion X von x hinzuthut. Drücket man nun diese Hypothese durch eine Gleichung aus, und differenziret dieselbe, so wird sich die Funkzion X bestimmen lassen.

Exempel I. Es sey zu integriren

$$2y^2\partial x + 4xy\partial y + 9y^2\partial y + 3x^2\partial x = 0$$

oder $(4xy + 9y^2)\partial y + (2y^2 + 3x^2)\partial x = 0$

Um zu erfahren, ob man ein richtiges Differenzial vor sich hat, so differenzire man $4xy + 9y^2$ in Betrachtung des x, und $2y^2 + 3x^2$ in Betrachtung des y, so kömt $4y\partial x$ und $4y\partial y$. Folglich ist das Differenzial richtig. Nun integrire man $(4xy + 9y^2)\partial y + (2y^2 + 3x^2)\partial x$ in Betrachtung des y allein, das ist, man integrire nur $4xy\partial y + 9y^2\partial y$, als wenn x beständig wäre, so kömt $2xy^2 + 3y^3$. Man nehme an, es fehle noch X zum völligen Integrale, so ist

$$\int(4xy + 9y^2)\partial y + \int(2y^2 + 3x^2)\partial x = 2xy^2 + 3y^3 + X$$

Man differenzire, so kömt

$$4xy\partial y + 9y^2\partial y + 2y^2\partial x + 3x^2\partial x = 2y^2\partial x + 4xy\partial y + 9y^2\partial y + \partial X$$

daher wird $3x^2\partial x = \partial X$

folglich $x^3 = X$

Also wird das gehörige Integral

$$2xy^2 + 3y^3 + x^3 + c = 0$$

Exem-

Exempel II. Es sey gegeben

$$x\partial y + y\partial x = 0$$

Integriret man für y allein, so kömt xy. Man setze also

$$\int(x\partial y + y\partial x) = xy + X$$

Man differenzire, so wird

$$x\partial y + y\partial x = x\partial y + y\partial x + \partial X$$

folglich $\quad 0 = \partial X$

folglich $\quad a = X$

das heißt, X muß eine beständige Größe seyn, weil dessen Differenzial 0 ist. Es ist also die Integralgleichung

$$xy + a = 0$$

Exempel III. Es sey

$$\frac{\partial x}{y} - \frac{x\partial y}{y^2} = 0$$

so wird, wenn man für x allein integriret $\int\frac{\partial x}{y} = \frac{x}{y}$.

Man setze

$$\int\left(\frac{\partial x}{y} - \frac{x\partial y}{y^2}\right) = \frac{x}{y} + Y$$

man differenzire, so ist

$$\frac{\partial x}{y} - \frac{x\partial y}{y^2} = \frac{\partial x}{y} - \frac{x\partial y}{y^2} + \partial Y$$

also ist $\partial Y = 0$ und $Y = a$

folglich ist die verlangete Gleichung

$$\frac{x}{y} + a = 0$$

Zusatz. Beide hier angeführte Methoden haben ihren Nutzen. Die erste heißt die Integrazion durch Absonderung der veränderlichen Größen (séparation des variables) und kann nur gebrauchet werden, wenn die Funkzion homogen ist. Die zweite heißt die Integrazion richtiger Differenziale (intégration des différencielles exactes), und kann nur gebraucht werden, wenn nichts in der Gleichung fehlet, was zum richtigen Differenziale gehöret. Aus beiden folgenden Aufgaben wird man ersehen, wie man sich behelfen kann, wenn die erforderlichen Bedingungen für beide Methoden nicht eintreffen.

§. 10.

Aufgabe.

Eine heterogene Funkzion von x und y in eine homogene verwandeln, wenn es angehet.

Auflösung. Man setze in der gegebenen Gleichung $y = u^s$, und suche hernach das s so zu bestimmen, daß die Koeffizienten der veränderlichen Größen in allen Sätzen eine gleiche Summe ausmachen.

Exempel. Es sey gegeben

$$(ay^2x^2 + b + cxy)\,dx = fx^4y^2\,dy$$

Es sey nun $y = u^s$, so wird

$$(ax^2u^{2s} + b + cxu^s)\,dx = fx^4u^{2s}\,d(u^s)$$

oder weil $d(u^s) = su^{s-1}\,du$

$$(ax^2u^{2s} + bx^0u^0 + cx^1u^s)\,dx = sfx^4u^{3s-1}\,du$$

Soll diese Gleichung homogen seyn, so müssen alle Sätze gleich viel veränderliche Dimensionen enthalten. Folglich muß in allen Sätzen die Summe der Koeffizienten bei den veränderlichen Größen gleich seyn. Es muß also seyn

$$2 + 2s = 0 + 0 = 1 + s = 4 + 3s - 1$$

Man

Man hat also erstlich

$$2 + 2s = 0$$

daher $1 + s = 0$

$$s = -1$$

Man versuche, ob alle vorige Gleichungen in der That eintreffen, wenn man annimmt $s = -1$. In diesem Falle wird $2 + 2s = 0$, ferner $0 + 0 = 0$, $1 + s = 0$, $4 + 3s - 1 = 0$. Also ist wirklich

$$2 + 2s = 0 + 0 = 1 + s = 4 + 3s - 1$$

Und die Funkzion wird homogen, wenn $s = -1$, und $y = u^s = u^{-1}$. Setzet man also in die gegebene Gleichung u^{-1} anstatt y, so bekömt man

$$(ax^2u^{-2} + b + cxu^{-1})\,dx = -fx^4u^{-4}\,du$$

und dieses ist eine homogene Gleichung von 0 veränderlichen Dimensionen. Multipliziret man beiderseits mit u^4, um die negativen Exponenten wegzuschaffen, so wird

$$(ax^2u^2 + bu^4 + cxu^3)\,dx = -fx^4\,du$$

Dieses ist nun eine homogene Gleichung von 4 Dimensionen zwischen x und u. In derselben können die veränderlichen Größen abgesondert werden, um das Integral zu erlangen.

§. 11.

Aufgabe.

Einen bequemen Faktor finden, vermittelst welches die Gleichung $M dy + N dx = 0$, ein richtiges Differenzial werden kann, wenn sie es nicht ist.

Auflösung. Es sey $M dy + N dx = 0$, und das erste Glied sey ein richtiges Differenzial. Dividiret man durch M, so bekömt man

$$dy + \frac{N}{M}\,dx = 0$$

und wenn N und M einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so verschwindet derselbe. Gesetzt, es werde dadurch $\frac{N}{M} = m$, so bekömt die Gleichung folgende Gestalt

$$dy + m dx = 0$$

Es kömt nun darauf an, den gemeinschaftlichen Faktor wieder zu finden, wodurch die Gleichung multipliziret werden muß, auf daß sie ein richtiges Differenzial enthalte. Es sey dieser Faktor $= P$. Wir setzen voraus, daß die Gleichung homogen war, und daß auch P eine homogene Funkzion des x und des y von λ Dimensionen oder Ausmessungen sey. Multipliziret man durch diesen Faktor, so kömt

$$P dy + P m dx = 0$$

Weil P und Pm von λ Dimensionen sind, so ist das Differenzial $P dy + P m dx$ aus einer homogenen Funkzion von x und y entstanden, welche $\lambda + 1$ Dimensionen hat. Es sey diese Funkzion z, so ist

$$Py + Pmx = (\lambda + 1) z$$

wie am gehörigen Orte (XVI. Hauptst. §. 33) bewiesen worden. Nun dividire man

$$P dy + P m dx = dz$$

durch $Py + Pmx = (\lambda + 1) z$

so kömt $\frac{dy + m dx}{y + mx} = \frac{dz}{(\lambda + 1) z}$

Daraus siehet man, daß $\frac{dy + m dx}{y + mx}$ ein richtiges Differenzial ist, und daß $\frac{1}{y + mx}$ ein solcher Faktor ist, als man ihn verlanget hat.

Eine

Eine andere Auflösung. Es sey gegeben die Gleichung

$$\mathrm{d}y + Py\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}x,$$

wo P und Q Funkzionen von x und beständigen Größen vorstellen. Gesetzt, es sey X der Faktor, wodurch $\mathrm{d}y + Py\mathrm{d}x$ ein richtiges Differenzial werden kann. Weil nun Q keine andere veränderliche Größe enthält als x, so wird der Faktor X auch bloß eine Funkzion von x und beständigen Größen seyn. Multipliziret man $\mathrm{d}y + Py\mathrm{d}x$ mit X, so kömt

$$X\mathrm{d}y + PXy\mathrm{d}x$$

Soll nun dieses ein richtiges Differenzial seyn, so muß seyn

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(PXy)}{\mathrm{d}y}$$

nemlich in dem Verstande, daß X in Betrachtung des x und PXy in Betrachtung des y allein differenziret wird (XVI. Hauptst. §. 30). Weil aber P und X Funkzionen von x allein sind, so ist in Betrachtung des y allein $\mathrm{d}(PXy) = PX\mathrm{d}y$, folglich $\frac{\mathrm{d}(PXy)}{\mathrm{d}y} = \frac{PX\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = PX.$

Also wird $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = PX$

Weil hier X eine Funkzion von x allein ist, so ist dX nicht bloß eine Parzial-Differenz, sondern das richtige Differenzial von X. Folglich kann die lezte Gleichung, wie gewöhnlich, behandelt werden, und es wird

$$\mathrm{d}X = PX\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{X} = P\mathrm{d}x$$

daher $\quad lX = \int P\mathrm{d}x$

oder $\quad X = e^{\int P\mathrm{d}x}$

 Dieses

Dieses ist also der verlangte Faktor. Man multiplizire damit die gegebene Gleichung, so wird

$$e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx = e^{\int P dx} Q dx$$

Man integrire das erste Glied der Gleichung anfänglich in Betrachtung des y allein, so kömt $e^{\int P dx} y$. Nun setze man

$$\int (e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx) = e^{\int P dx} y + S$$

Man differenzire, so kömt

$$e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx = e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx + dS$$

folglich ist $dS = 0$, und $S = a$. Also wird die Integralgleichung seyn

$$e^{\int P dx} y + a = \int e^{\int P dx} Q dx$$

oder $$e^{\int P dx} y = a + \int e^{\int P dx} Q dx$$

daher $$y = e^{-\int P dx} (a + \int e^{\int P dx} Q dx)$$

Es bleibt also nur übrig in jedem Falle austatt P und Q die Funkzionen zu setzen, welche durch diese Buchstaben vorgestellet werden.

Zusatz. Es sey eine Differenzialgleichung unter dieser Gestalt gegeben

$$Ay + B\frac{dy}{dx} = X$$

so ist $$Aydx + Bdy = Xdx$$

oder $$Bdy + Aydx = Xdx$$

oder $$dy + \frac{A}{B} y dx = \frac{X}{B} dx$$

wo A, B und X Funkzionen von x vorstellen, so wird vermittelst voriger Formel seyn

$$y = e^{-\int \frac{A}{B} dx} \left(a + \int e^{\int \frac{A}{B} dx} \cdot \frac{X}{B} dx \right)$$

§. 12.

Aufgabe.

Die veränderlichen Größen in einer homogenen Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung absondern.

Auflösung. Es sey

$$V = 0$$

eine homogene Differenzial-Gleichung, zwischen y, x, p oder $\frac{dy}{dx}$, und q oder $\frac{dp}{dx}$, so daß in allen Sätzen die Summe der Exponenten der veränderlichen Größen x, y, p, und q allemal gleich sey. Man nehme an $y = ux$ und $q = \frac{z}{x}$, so wird eine neue Gleichung entstehen zwischen z, u und p, welche wir bezeichnen wollen durch

$$V' = 0$$

Weil nun $\frac{dy}{dx} = p$, so ist $dy = pdx$, und weil $y = ux$, so ist $dy = udx + xdu$, daher ist $pdx = udx + xdu$ oder $(p - u)dx = xdu$ oder $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$. Ferner, weil $\frac{dp}{dx} = q$, so ist $dp = qdx$; und weil $q = \frac{z}{x}$, so ist $dp = \frac{zdx}{x}$, folglich $\frac{dp}{z} = \frac{dx}{x}$. Setzen wir diesen Werth in der eben gefundenen Gleichung $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, so kömmt $\frac{dp}{z} = \frac{du}{p-u}$.

Vermittelst dieser lezten Gleichung und der Gleichung $V' = 0$, muß man versuchen eine Gleichung von der ersten Differenzial-Ordnung zwischen p und u zu finden,

und daraus den Werth des p in einer Funkzion von u erforschen. Wenn dieses geschehen, so kann man

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$$

integriren, und also bekömmt man zulezt den Werth des x durch eine Funkzion des u ausgedrücket, folglich auch den Werth des y in einer Funkzion des u, weil $y = ux$.

Exempel. Es sey gegeben zu integriren

$$x^2 d^2y + xdxdy = nydx^2,$$

wo dx beständig ist, oder, wenn man alles durch dx^2 dividiret

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = ny$$

$$\text{oder} \quad x^2 q + xp = ny$$

Nun nehme man an, wie vorgeschrieben worden, $y = ux$ und $q = \frac{z}{x}$ oder $qx = z$, so bekömmt man

$$zx + px = nux$$

$$\text{oder} \quad z + p = nu$$

Dieses ist die Gleichung zwischen z, u und p, die wir angedeutet haben durch $V' = 0$, sie giebt

$$z = nu - p$$

Wird nun dieser Werth des z in der Formel

$$\frac{dp}{z} = \frac{du}{p-u}$$

angebracht, so wird

$$\frac{dp}{nu-p} = \frac{du}{p-u} \text{ oder } (p-u)dp = (nu-p)du$$

Diese lezte Gleichung ist homogen, von der ersten Ordnung, und enthält nur zwei veränderliche Größen. Sie kann

also

also nach §. 9 integriret werden, und so bekömmt man den Werth des p in einer Funkzion von u. Wenn dieses geschehen, so setze man den gefundenen Werth des p in die Gleichung

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$$

so bekömmt man eine Gleichung, welche leicht zu integriren ist, und den Werth des x in einer endlichen oder unendlichen Funkzion von u oder $\frac{y}{x}$ giebet.

§. 13.

Aufgabe.

Die veränderlichen Größen absondern, in einer heterogenen Gleichung von der zweiten Ordnung.

Auflösung. Es sey gegeben eine heterogene Gleichung zwischen x, y, p oder $\frac{\partial y}{\partial x}$, und q oder $\frac{\partial p}{\partial x}$. Man nehme an, es sey $y = ux^n$, $p = tx^{n-1}$, $q = zx^{n-2}$. Man versuche, ob für u ein Werth zu finden ist, wodurch die Größe x gänzlich aus der Gleichung verschwinde. Dieses vorausgesetzet, wird es nicht schwer seyn, die gegebene Gleichung auf eine andere von der ersten Ordnung zurück zu führen, wie man es aus folgendem Exempel ersehen wird.

Exempel. Es sey gegeben diese Gleichung

$$x^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (x^3 + 2xy)\frac{\partial y}{\partial x} - 4y^2$$

worinn ∂x beständig ist, oder

$$x^4 q = p(x^3 + 2xy) - 4y^2$$

Es sey nun $q = z x^{n-2}$, $p = t x^{n-1}$, $y = u x^n$, so bekömmt man

$$x^{n+2} z = t x^{n+2} + x^{2n}(2tu - 4u^2)$$

Man siehet, daß x aus der Gleichung verschwinden wird, wenn man annimmt

$$n + 2 = 2n \text{ oder } n = 2$$

Ist also $n = 2$, so wird unsere Gleichung

$$z = t + 2tu - 4u^2$$

Und weil angenommen worden

$$y = ux^n \text{ so wird } y = ux^2$$

$$p = tx^{n-1} \text{ so wird } p = tx$$

$$q = zx^{n-2} \text{ so wird } q = z$$

Aus $y = ux^2$ folget

$$dy = 2ux dx + x^2 du$$

es ist aber $dy = p dx$, also

$$p dx = 2ux dx + x^2 du$$

$$\frac{p}{x} dx = 2u dx + x du$$

und weil $\frac{p}{x} = t$, so ist

$$t dx = 2u dx + x du \text{ oder } (t - 2u) dx = x du$$

Ferner, weil $p = tx$, so ist

$$dp = t dx + x dt$$

es ist aber $dp = q dx = z dx$, also ist

$z dx = t dx + x dt$ oder $(z - t) dx = x dt$

Aus den beiden Gleichungen $(t - 2u) dx = x du$ und $(z - t) dx = x dt$, ziehet man

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{t - 2u}$$

und $$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{z - t}$$

Also

Also ist

$$\frac{\partial u}{t-2u}=\frac{\partial t}{z-t}$$

oder $(z-t)\partial u=(t-2u)\partial t$

oder weil $z=t+2tu-4u^2$

$$(2tu-4u^2)\partial u=(t-2u)\partial t$$

$$(t-2u)2u\partial u=(t-2u)\partial t$$

folglich $2u\partial u=\partial t$

folglich $u^2+c=t$

Man setze den gefundenen Werth des t, nemlich u^2+c in die Gleichung $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial u}{t-2u}$, so bekömmt man

$$\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial u}{u^2-2u+c}$$

Nun kömmt es beim Integriren darauf an, ob $c=1$, oder $c<1$ oder $c>1$ seyn soll. Im ersten Falle, nemlich wenn $c=1$, hat man

$$\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial u}{u^2-2u+1}=\frac{\partial u}{(u-1)^2}=(u-1)^{-2}\partial u$$

folglich wird das Integral, vermöge der 4ten Formel im §. 4.

$$l\frac{x}{c}=\frac{(u-1)^{-2+1}}{-2+1}=\frac{(u-1)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{u-1}=\frac{1}{1-u}$$

oder weil $u=\frac{y}{x^2}$

$$1^\circ)\ l\frac{x}{c}=\frac{1}{1-\frac{y}{x^2}}=\frac{x^2}{x^2-y}$$

Soll

Soll aber $c < 1$ seyn, so kann man also schreiben

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{(u-1)^2 - (1-c)}$$

und dann wird das Integral

$$l\frac{x}{c'} = \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}\, l\frac{u-1+\sqrt{(1-c)}}{u-1-\sqrt{(1-c)}}$$

Man kann sich bei dieser Gelegenheit überhaupt diese Formel merken

$$\int \frac{\partial z}{(z \pm a)^2 - b^2} = \frac{-1}{2b} . l\frac{(z \pm a)+b}{(z \pm a)-b}$$

welche sich leicht durch die Differenziazion beweisen läßt. Setzet man in dem gefundenen Integrale für u dessen Werth $\frac{y}{x^2}$, so kömmt

$$l\frac{x}{c'} = \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}\, l\frac{\frac{y}{x^2}-1+\sqrt{(1-c)}}{\frac{y}{x^2}-1-\sqrt{(1-c)}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}\, l\frac{y-x^2+x^2\sqrt{(1-c)}}{y-x^2-x^2\sqrt{(1-c)}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}\, l\frac{y-x^2[1-\sqrt{(1-c)}]}{y-x^2[1+\sqrt{(1-c)}]}$$

daher ist $\frac{x}{c'} = \left(\frac{y-x^2[1-\sqrt{(1-c)}]}{y-x^2[1+\sqrt{(1-c)}]}\right)^{\frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}}$

oder $\frac{x}{c'} = \left(\frac{y-x^2[1+\sqrt{(1-c)}]}{y-x^2[1-\sqrt{(1-c)}]}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{(1-c)}}}$

oder II°) $x = c'\left(\frac{y-x^2[1+\sqrt{(1-c)}]}{y-x^2[1-\sqrt{(1-c)}]}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{(1-2)}}}$

Es

Es bleibet nun noch der dritte Fall, wo $c > 1$ ist. In diesem Falle kann man die gefundene Differenzial-Gleichung also schreiben

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{(u-1)^2 + (c-1)}$$

und, wenn man integriret, so bekömmt man

$$l\frac{x}{c'} = \frac{1}{\sqrt{(c-1)}}\, \mathfrak{AT}\, \frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}}$$

Denn es ist überhaupt

$$\int \frac{dz}{(z \pm a)^2 + b^2} = \frac{1}{b}\, \mathfrak{AT}\, \frac{z \pm a}{b}$$

welche Formel mit der 14ten im §. 4 beinahe die nemliche ist, und durch die Differenziazion bewiesen wird. Weil nun gefunden worden

$$l\frac{x}{c'} = \frac{1}{\sqrt{(c-1)}}\, \mathfrak{AT}\, \frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}}$$

so ist $l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)} = \mathfrak{AT}\, \frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}}$

folglich ist $\frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}} = \mathfrak{T}\left[l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)}\right]$

oder weil $u = \frac{y}{x^2}$,

$$\frac{\frac{y}{x^2} - 1}{\sqrt{(c-1)}} = \mathfrak{T}\left[l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)}\right]$$

III°) $\frac{y - x^2}{x^2\sqrt{(c-1)}} = \mathfrak{T}\left[l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)}\right]$

Wenn

Wenn wir also alles in der Kürze zusammen nehmen, so findet sich, daß wenn

$$x^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (x^3 + 2xy)\frac{\partial y}{\partial x} - 4y^2$$

so wird entweder

$$\text{I°)}\quad l\frac{x}{c'} = \frac{x^2}{x^2 - y}$$

oder $$\text{II°)}\quad x = c'\left(\frac{y - x^2[1 + \sqrt{(1-c)}]}{y - x^2[1 - \sqrt{(1-c)}]}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{(1-c)}}}$$

oder $$\text{III°)}\quad \frac{y - x^2}{x^2\sqrt{(c-1)}} = \mathfrak{T}\left[l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)}\right]$$

nachdem man die willkürliche Größe c entweder $= 1$ oder < 1 oder > 1 annehmen will. Es ist in der Integral-Gleichung ausser c noch eine willkürliche Größe c', welches auch nothwendig ist, da die gegebene Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung ist. Denn wenn man eine Funkzion zum ersten male differenziret, so verschwindet eine beständige Größe, wenn sie vorhanden ist. Es kann aber wiederum in dem ersten Differenziale eine beständige Größe entstehen, welche bei der zweiten Differenziazion verschwindet. Also müssen bei der Integrazion einer Differenzial-Funkzion von der zweiten Ordnung allemal zwei willkürliche Größen angebracht werden.

§. 14.

Aufgabe.

Die veränderlichen Größen absondern, in einer Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung, welche in Betrachtung des y, p und q homogen ist, ohne Rücksicht auf die Dimensionen des x.

Auflö-

Auflösung. Man mache $p=uy$, und $q=zy$, so bekömmt man eine Gleichung zwischen x, u und z, woraus man z in einer Funkzion von x und u ziehen kann.

Weil angenommen ist $p = uy$
so ist $dp = udy + ydu$

Es ist aber $u=\frac{p}{y}$, folglich $du=\frac{ydp-pdy}{y^2}$, oder $\frac{dp}{y}-\frac{pdy}{y^2}$, folglich $ydu=dp-\frac{pdy}{y}$, also

$$dp = udy + dp - \frac{pdy}{y}$$
$$0 = udy - \frac{pdy}{y}$$
$$0 = uydy - pdy$$
$$0 = uy - p$$
$$0 = uy - \frac{dy}{dx}$$
$$0 = uydx - dy$$
$$0 = udx - \frac{dy}{y}$$
$$\frac{dy}{y} = udx$$

Ferner weil $\frac{dp}{dx} = q = zy$, so ist $dp = zydx$

Da also $dp = zydx$
und auch $dp = udy + ydu$
so ist $udy + ydu = zydx$
$$udy = zydx - ydu$$
$$dy = \frac{zydx - ydu}{u}$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{zdx - du}{u}$$

Weil

Weil nun $\frac{\partial y}{y} = u\partial x$

und $\frac{\partial y}{y} = \frac{z\partial x - \partial u}{u}$

so ist $u\partial x = \frac{z\partial x - \partial u}{u}$

$$u^2 \partial x = z\partial x - \partial u$$

$$\partial u + u^2\partial x = z\partial x$$

Setzet man nun anstatt z, dessen Werth, welcher eine Funkzion von x und u ist, so hat man eine Differenzial-Gleichung zwischen u und x von der ersten Ordnung. Man versuche daraus u zu erhalten, so kann man den Werth des y durch die Gleichung $\frac{\partial y}{y} = u\partial x$ bekommen.

Exempel. Es sey diese Gleichung zu integriren

$$xy\partial^2 y = y\partial x\partial y + x\partial y^2 + \frac{bx\partial y^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

oder $xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y\frac{\partial y}{\partial x} + x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{bx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

oder $xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

Man mache $p = uy$ und $q = zy$, so kömmt

$$xy^2 z = uy^2 + xu^2y^2 + \frac{bxu^2y^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

oder $xz = u + xu^2 + \frac{bxu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

daher ist $z = \frac{u}{x} + u^2 + \frac{bu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

Diesen

Diesen Werth des z setze man in die Formel

$$\mathrm{d}u + u^2\mathrm{d}x = z\mathrm{d}x$$

so kömmt

$$\mathrm{d}u + u^2\mathrm{d}x = \frac{u\mathrm{d}x}{x} + u^2\mathrm{d}x + \frac{bu^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$\text{oder} \quad \mathrm{d}u = \frac{u\mathrm{d}x}{x} + \frac{bu^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$x\mathrm{d}u = u\mathrm{d}x + \frac{bu^2x\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x = \frac{bu^2x\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$\frac{x\mathrm{d}u - u\mathrm{d}x}{u^2} = \frac{bx\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$-\frac{u\mathrm{d}x - x\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{bx\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Das erste Glied wird integriret durch $c - \frac{x}{u}$. Um das zweite Glied zu integriren, setze man $\sqrt{(a^2 - x^2)} = t$ (§. 5), so wird $x = \sqrt{(a^2 - t^2)}$, $\mathrm{d}x = \frac{-t\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - t^2)}}$, folglich $\frac{bx\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -b\mathrm{d}t$, wovon das Integral $-bt$ ist, oder $-b\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Also wird

$$c - \frac{x}{u} = -b\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$uc - x = -bu\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$-x = -u[c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}]$$

$$u = \frac{x}{c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Diesen Werth des u setze man in die Formel

$$\frac{dy}{y} = u dx$$

so kömmt $$\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Um hier das zweite Glied zu integriren, setze man wieder: um $\sqrt{(a^2 - x^2)} = t$, so wird wie vorher $x = \sqrt{(a^2 - t^2)}$, $dx = -\frac{-t dx}{\sqrt{(a^2 - t^2)}}$ folglich $\frac{x dx}{c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{-t dt}{c + bt}$ $= -\frac{dt}{b} + \frac{c dt}{b(c + bt)}$. Hiervon ist das Integral $-\frac{t}{b} + \frac{c}{b^2} l(c + bt)$ oder $-\frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{c}{b^2}$ $l[c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}]$

Integriret man demnach die gefundene Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{c + b(a^2 - x^2)}$$

so kömmt

$$l\frac{y}{c'} = -\frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{c}{b^2} l[c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}]$$

Und dieses Integral ist vollständig, weil es zwei willkürliche Größen enthält.

Ein und zwanzigstes Hauptstück.

Von den unbestimmten Funkzionen und von der Variazions-Rechnung.

§. 1.

Eine unbestimmte Funkzion ist ein Ausdruck, welcher überhaupt zu erkennen giebet, daß eine Größe eine Funkzion anderer Größen ist, ohne jedoch zu bestimmen, auf welcher Art. Um eine unbestimmte Funkzion zu bezeichnen, wollen wir den deutschen Buchstaben $\mathfrak{F}$ gebrauchen. Es wird also bedeuten

$\mathfrak{F}x$, eine Funkzion von x

$\mathfrak{F}(x, y)$, eine Funkzion von x und y

$\mathfrak{F}(xy)$, eine Funkzion von xy

$\mathfrak{F}(ax+y^2)$, eine Funkzion von $ax+y^2$

Man beobachte, daß $\mathfrak{F}(xy)$ nicht überhaupt eine Funkzion von x und y, sondern von xy, als eine einzige Größe betrachtet, bedeutet. Eben so ist $\mathfrak{F}(ax+y^2)$ eine Funkzion, nicht von x und y im Allgemeinen, sondern von $ax+y^2$. Wenn also $ax+y^2 = z$, so ist

$$\mathfrak{F}(ax+y^2) = \mathfrak{F}z$$

§. 2.

Man kann die Differenziale der unbestimmten Funkzionen auf eine allgemeine Art vorstellen. Zum Exempel, es ist klar, daß das Differenzial einer Funkzion von y, wiederum in einer Funkzion von y bestehet, welche durch dy multipliziret ist. Um nun solche Funkzionen vorzustel-

len die aus anderen entstehen, kann man sich der Strich-lein neben $\mathfrak{F}$ bedienen. Zum Beispiel

$$\mathfrak{d}\mathfrak{F}y = \mathfrak{d}y\,\mathfrak{F}'y$$
$$\mathfrak{d}\mathfrak{F}'y = \mathfrak{d}y\,\mathfrak{F}''y$$
$$\mathfrak{d}\mathfrak{F}(ax+y^2) = \mathfrak{d}(ax+y^2)\,\mathfrak{F}'(ax+y^2)$$

oder $\mathfrak{d}\mathfrak{F}(ax+y^2) = (a\mathfrak{d}x+2y\mathfrak{d}y)\,\mathfrak{F}'(ax+y^2)$

Wenn das Differenzial von $\mathfrak{F}(x, y)$ vorgestellet werden soll, so nehme man an, es seyen P und Q zwei andere Funkzionen von x und y, die so beschaffen seyen, daß $\frac{\mathfrak{d}P}{\mathfrak{d}x} = \frac{\mathfrak{d}Q}{\mathfrak{d}y}$, so wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{F}(x, y) = (P\mathfrak{d}y + Q\mathfrak{d}x)\,\mathfrak{F}'(x, y)$$

§. 3.

Es sey $z = \mathfrak{F}(x, y)$, und $\mathfrak{d}z = M\mathfrak{d}y + N\mathfrak{d}x$, so entstehet M wenn man z in Betrachtung des y allein differenziret, und das Differenzial durch $\mathfrak{d}y$ dividiret. Es kann also M vorgestellet werden durch $\frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}y}$, und $M\mathfrak{d}y$ durch $\frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}y}\mathfrak{d}y$, wohl verstanden daß z in $\frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}y}$ nur für y allein differenziret ist. Eben so kann $N\mathfrak{d}x$ durch $\frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}x}\mathfrak{d}x$ vorgestellet werden. Also

wenn $z = \mathfrak{F}(x, y)$

so ist $\mathfrak{d}z = \frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}y}\mathfrak{d}y + \frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}x}\mathfrak{d}x$

Die Säze $\frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}y}\mathfrak{d}y$ und $\frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{d}x}\mathfrak{d}x$ sind die Parzial-Differenzen von z. (Siehe XVI. Hauptstück §. 28). Folglich ist

ist jede Gleichung zwischen z, x, y, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ eine Gleichung von der ersten Ordnung mit Parzial-Differenzen seyn. Wir wollen hier, vermittelst weniger Aufgaben, einen Begrif von der Integrazion solcher Gleichungen geben.

§. 4.

Aufgabe.

Die Gleichung $\frac{dz}{dy} = P$, integriren, wo $\frac{dz}{dy}$ eine Parzial-Differenz, und P eine Funkzion von x und y ist.

Auflösung. Weil

$$\frac{dz}{dy} dy = P dy$$

so muß $P dy$ ein Glied des Differenzials von z (§. 3) seyn. Folglich muß z entstehen, wenn man $P dy$ in Betrachtung des y allein integriret, und wenn man noch eine Funkzion von x hinzu setzet. Folglich wird das vollständige Integral von $\frac{dz}{dy} = P$ seyn

$$z = \int P dy + Fx$$

wo $\int P dy$ das Integral von $P dy$ in Betrachtung des y allein bedeutet. Eben so, und in einem ähnlichen Verstande, wird das vollständige Integral von $\frac{dz}{dx} = P$, seyn

$$z = \int P dx + Fy$$

§. 5.

Die Gleichung $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} = 0$ integriren, wo M und N gegebene Funkzionen von x und y sind.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung bekömmt man

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{N}{M} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

Diesen Werth von $\frac{\partial z}{\partial y}$, setze man in die allgemeine Gleichung

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial y} \partial y + \frac{\partial z}{\partial x} \partial x$$

so kömmt $\partial z = \frac{M \partial x - N \partial y}{M.} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$

Es sey nun μ der Faktor, wodurch $M\partial x - N\partial y$ ein richtiges Differenzial wird, und es sey $\mu M \partial x - \mu N \partial y = \partial S$, so wird $M\partial x - N\partial y = \frac{\partial S}{\mu}$, folglich $\frac{M\partial x - N\partial y}{M} = \frac{\partial S}{\mu M}$,

folglich $\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial S}{\mu M}$

Diese Gleichung würde widersinnig seyn, wenn nicht $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu M}$ und z Funkzionen von S wären. Denn eine Differenzial-Funkzion bestehet allemal aus dem Differenziale einer veränderlichen Größe, und aus einem Faktor, der eine Funkzion der nemlichen Größe ist, und das Integral ist wiederum eine Funkzion derselbigen Größe. Z. E. Es sey $z = \mathfrak{F}u$, so ist $\partial z = \mathfrak{F}'u \cdot \partial u$, und $\int \mathfrak{F}'u \cdot \partial u = \mathfrak{F}u = z$ (§. 2). Weil also $\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu M} \cdot \partial S$, so muß nothwendig seyn

$$\partial z = \mathfrak{F}S \cdot \partial S$$

oder $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu M} = \mathfrak{F}S$, und folglich auch $z = \mathfrak{F}S$.
Diese lezte Gleichung $z = \mathfrak{F}S$ ist das verlangete Integral.

Exem-

Exempel. Es sey zu integriren

$$y\frac{dz}{dy} + x\frac{dz}{dx} = 0$$

Hier ist $M = y$, $N = x$, folglich $\mu M dx - \mu N dy = \mu(y dx - x dy)$. Es ist sichtbar, daß $y dx - x dy$ ein richtiges Differenzial wird, wenn $\mu = \frac{1}{y^2}$, und es wird seyn $\frac{y dx - x dy}{y^2} = dS$, folglich $S = \frac{x}{y}$, folglich $z = \mathfrak{F}\frac{x}{y}$.

§. 6.

Aufgabe.

Die Gleichung $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P = 0$ integriren, wo M, N und P Funkzionen von x und y sind.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung erhält man

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{N}{M}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{P}{M}$$

Diesen Werth von $\frac{dz}{dy}$ setze man in die allgemeine Gleichung

$$dz = \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx$$

so kömt $dz = \frac{M dx - N dy}{M}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{P dy}{M}$

Es sey wie in voriger Aufgabe $\mu(M\partial x - N\partial y) = \partial S$, so wird

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial S}{\mu M} - \frac{P\partial y}{M}$$

folglich $$z = \int \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial S}{\mu M} - \int \frac{P\partial y}{M}$$

Es ist aber, wie in voriger Aufgabe, $\int \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial S}{\mu M} = \mathfrak{F}S$, also

$$z = \mathfrak{F}S - \int \frac{P\partial y}{M}$$

Bevor man $\frac{P\partial y}{M}$ integriret, muß man dessen Werth durch eine Funkzion von y und S ausdrücken.

Exempel. Es sey zu integriren

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = axy$$

Hier ist $M = y^2$, $N = x^2$, $P = -axy$, folglich ist $M\partial x - N\partial y = y^2\partial x - x^2\partial y$. Dieses Differenzial wird richtig, wenn man es durch y^2x^2 dividiret; denn

so wird $$\frac{\partial x}{x^2} - \frac{\partial y}{y^2} = \partial S, \text{ daher}$$

$$S = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$$

daher $$x = \frac{y}{1-yS}$$

Diesen

Diesen Werth des x setze man in $-\frac{P\partial y}{M}$ oder $\frac{ax\partial y}{y}$, so kömt $\frac{a\partial y}{1-yS}$, folglich

$$z = \mathfrak{F}S - \int\frac{a\partial y}{1-yS}$$

oder $$z = \mathfrak{F}S - \frac{a}{S}l(1-yS)$$

oder $$z = \mathfrak{F}\left(\frac{x-y}{xy}\right) - \frac{axy}{x-y}l\frac{y}{x}$$

Dieses ist das verlangete Integral.

§. 7.

Aufgabe.

Die Gleichung $M\frac{\partial z}{\partial y} + N\frac{\partial z}{\partial x} + Pz = 0$ integriren, wo M, N und P Funkzionen von x und y sind.

Auflösung. Es sey $z = e^{\varrho}$, in dem ϱ irgend einen unbestimmten Exponenten bedeutet. Daher wird

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\varrho}\,\frac{\partial \varrho}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\varrho}\,\frac{\partial \varrho}{\partial x}$$

Setzet man diese Werthe in die gegebene Gleichung, so wird sie

$$M\frac{\partial \varrho}{\partial y} + N\frac{\partial \varrho}{\partial x} + P = 0$$

 Diese

Diese Gleichung giebt, vermöge voriger Aufgabe,

$$\varepsilon = \mathfrak{F}S - \int \frac{P\partial y}{M}$$

folglich $z = e^{\varepsilon} = e^{-\int \frac{P\partial y}{M} + \mathfrak{F}S} = e^{-\int \frac{P\partial y}{M}} e^{\mathfrak{F}S}$

oder weil $e^{\mathfrak{F}S}$ wiederum eine Funkzion von S ist,

$$z = e^{-\int \frac{P\partial y}{M}} \mathfrak{F}S$$

Exempel. Es sey zu integriren gegeben

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} = az$$

so hat man $x\partial x - y\partial y = \partial S$, daher $S = \frac{x^2 - y^2}{2}$

Ferner $-\frac{P\partial y}{M} = \frac{a\partial y}{x} = \frac{a\partial y}{\sqrt{(2S + y^2)}}$

Wenn man diesen Ausdruck in Betrachtung des y allein integriret, so ist das Integral $a\,l[y + \sqrt{(2S + y^2)}]$.

Folglich ist $e^{-\int \frac{P\partial y}{M}} = [y + \sqrt{(2S + y^2)}]^a$ und

$z = [y + \sqrt{(2S + y^2)}]^a \cdot \mathfrak{F}S = (y + x)^a \cdot \mathfrak{F}(x^2 - y^2)$

§. 8.

Es sey gegeben eine Gleichung zwischen x und y, oder welches einerlei ist, es sey y eine Funkzion von x. Es seyen x und x' zwei verschiedene Werthe von x, und es seyen y und y' die dazu gehörigen Werthe des y.

Laßt uns nun annehmen, es geschehe in der Gleichung oder Funkzion eine unendlich kleine Veränderung, zum Exempel, daß irgend eine beständige Größe in der Glei-

chung

chung gar wenig größer oder kleiner werde. In der veränderten Funkzion wollen wir nun wiederum zwei Werthe das x annehmen, nemlich X und X′, so daß X unendlich wenig größer sey, als das vorige x, und X′ unendlich wenig größer, als x'. Es seyen Y und Y′ die zu X und X′ gehörigen Werthe des y.

Nun wird Y ein wenig von y unterschieden seyn, theils weil X etwas größer ist als x, theils weil die Gleichung, woraus der Werth des Y genommen ist, von der erst gegebenen etwas verschieden ist. Aus der nemlichen Ursache wird Y′ dem y' nicht völlig gleich seyn.

Hingegen zwischen x und x', desgleichen zwischen y und y', zwischen X und X′, zwischen Y und Y′ kann eine endliche Differenz statt finden.

Laßt uns dieses durch ein Exempel erläutern. Es sey $y = 3x^2$. Wir wollen annehmen, $x = 4$, $x' = 6$, so wird $y = 48$, $y' = 108$. Gesetzt, die Gleichung verändert sich ein wenig und es wird $y = 3;000001 . x^2$. Gesetzt auch x und x' verändern sich ein wenig, und es wird z. E. X $= 4;000002$, X′ $= 6;000005$. Alsdenn wird

$$Y = 3;000001\,(4;000002)^2 = 48;000064000028000004$$

$$Y' = 3;000001\,(6;000005)^2 = 108;000216000135000025$$

Hier siehet man, daß Y größer geworden ist als y, um den kleinen Bruch 0;000064....., und Y′ größer als y' um 0;000216..... Sind nun die Unterschiede zwischen den beständigen Größen in beiden Gleichungen, und die Unterschiede zwischen x und X, desgleichen zwischen x' und X′ unendlich klein, so werden auch die Unterschiede zwischen y und Y, y' und Y′ unendlich klein werden.

§. 9.

§. 9.

Weil x und x' zur nemlichen Gleichung gehören, und der Unterschied zwischen denselben als endlich angenommen wird, so ist $x' - x = \Delta x$. Aus derselbigen Ursache ist $y' - y = \Delta y$, ebenfalls ist in der veränderten Gleichung $X' - X = \Delta X$, $Y' - Y = \Delta Y$.

Weil aber x und X, x' uud X', y und Y, y' und Y' nicht völlig zur selbigen Gleichung gehören, so kann der unendlich kleine Unterschied dieser Größen nicht durch das gewöhnliche Differenzialzeichen ausgedrücket werden, und auch nicht eigentlich den Namen eines Differenzials führen.

Deswegen nennet man einen solchen unendlich kleinen Unterschied eine **Variazion**, und man kann ihn mit dem griechischen δ bezeichnen.

Also ist

$$X - x = \delta x$$
$$X' - x' = \delta x'$$
$$Y - y = \delta y$$
$$Y' - y' = \delta y'$$

§. 10.

Weil $X' - X = \Delta X$, so ist $X' = X + \Delta X$

und weil $X' - x' = \delta x'$, so ist $X' = x' + \delta x'$

Weil $Y' - Y = \Delta Y$, so ist $Y' = Y + \Delta Y$

und weil $Y' - y' = \delta y'$, so ist $Y' = y' + \delta y'$

Man siehet also, daß

$$X + \Delta X = x' \delta x'$$
$$Y + \Delta Y = y' \delta y'$$

In dieser lezten Gleichung seze man anstatt Y, dessen Werth $y + \delta y$, und anstatt y', dessen Werth $y + \Delta y$, so entstehet

$$y + \delta y + \Delta(y + \delta y) = y + \Delta y + \delta(y + \Delta y)$$

Es ist aber $\Delta(y + \delta y) = \Delta y + \Delta\delta y$. Es ist auch aus ähnlichen Gründen $\delta(y + \Delta y) = \delta y + \delta\Delta y$. Sezet man diese Werthe von $\Delta(y + \delta y)$ und $\delta(y + \Delta y)$ in die Gleichung, so bekömt man

$$y + \delta y + \Delta y + \Delta\delta y = y + \Delta y + \delta y + \delta\Delta y$$

oder $\Delta\delta y = \delta\Delta y$

Diese lezte Gleichung enthält einen wichtigen Lehrsaz, der also in Worten ausgedrücket werden kann: **Die Variazion der Differenz einer Funkzion, ist gleich der Differenz der Variazion derselben Funkzion.**

§. 11.

Voriger Lehrsaz gilt auch von höheren Differenzen. Es wird also seyn

$$\delta\Delta^2 y = \Delta^2\delta y$$

$$\delta\Delta^3 y = \Delta^3\delta y$$

$$\delta\Delta^4 y = \Delta^4\delta y$$

überhaupt $\delta\Delta^n y = \Delta^n\delta y$

Denn es ist $\delta\Delta^2 y = \delta\Delta(\Delta y) = \Delta\delta(\Delta y)$, und weil $\delta(\Delta y) = \Delta\delta y$, so ist $\Delta\delta(\Delta y) = \Delta\Delta\delta y = \Delta^2\delta y$.

Ferner ist $\delta\Delta^3 y = \delta\Delta(\Delta^2 y) = \Delta\delta(\Delta^2 y)$. Es ist aber eben bewiesen worden, daß $\delta\Delta^2 y = \Delta^2\delta y$, also wird $\Delta\delta(\Delta^2 y) = \Delta\Delta^2\delta y = \Delta^3\delta y$.

Weiter, ist $\delta\Delta^4 y = \delta\Delta(\Delta^3 y) = \Delta\delta(\Delta^3 y)$. Es ist aber $\delta\Delta^3 y = \Delta^3\delta y$, also wird $\Delta\delta(\Delta^3 y) = \Delta\Delta^3\delta y = \Delta^4\delta y$.

Und so kann der Beweis ins Unendliche fortgesetzet werden.

§. 12.

Es sey eine Reihe $'V, ''V, '''V, \ldots . V$. Hier ist der lezte Satz V, die Differenz des Aggregats aller vorhergehenden Sätze (XV Hauptst. §. 14). Also ist

$$V = \Delta('V + ''V + '''V + \&c.), \text{ folglich}$$
$$\Sigma V = V' + ''V + '''V + \&c., \text{ und}$$
$$\delta\Sigma V = \delta('V + ''V + '''V + \&c.)$$

Ferner, weil

$$V = \Delta('V + ''V + '''V + \&c.), \text{ so ist}$$
$$\delta V = \delta\Delta('V + ''V + '''V + \&c.) \text{ oder}$$
$$\delta V = \Delta\delta('V + ''V + '''V + \&c.). \text{ Daher ist}$$
$$\Sigma\delta V = \Sigma\Delta\delta('V + 'V + '''V + \&c.), \text{ oder}$$
$$\Sigma\delta V = \delta('V + ''V + '''V + \&c.)$$

Weil nun

$$\Sigma\delta V = \delta('V + ''V + '''V + \&c.), \text{ und auch}$$
$$\delta\Sigma V = \delta('V + ''V + '''V + \&c.),$$

so folget daraus, daß

$$\Sigma\delta V = \delta\Sigma V$$

oder daß die Summe der Variazion einer Funkzion, gleich ist der Variazion der Summe der nemlichen Funkzion.

§. 13.

Man kann die auf einander folgenden Summen einer Funkzion V eben so, wie die auf einander folgenden Differenzen durch kleine Ziffern ausdrücken. Zum Exempel

anstatt	$\Sigma\Sigma V$	kann man schreiben		$\Sigma^2 V$
	$\Sigma\Sigma\Sigma V$	:	: :	$\Sigma^3 V$
	$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma V$	:	: :	$\Sigma^4 V$
	&c.			&c.

Dieses vorausgesetzt, läßt sich beweisen, daß

$$\delta\Sigma^n V = \Sigma^n \delta V$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \delta\Sigma^2 V &= \delta\Sigma(\Sigma V) \\ &= \Sigma\delta(\Sigma V) \\ &= \Sigma\Sigma\,\delta V \\ &= \Sigma^2\,\delta V \end{aligned}$$

Eben so ist

$$\begin{aligned} \delta\Sigma^3 V &= \delta\Sigma(\Sigma^2 V) \\ &= \Sigma\delta(\Sigma^2 V) \\ &= \Sigma\Sigma^2\,\delta V \\ &= \Sigma^3\,\delta V \end{aligned}$$

Desgleichen ist

$$\begin{aligned} \delta\Sigma^4 V &= \delta\Sigma(\Sigma^3 V) \\ &= \Sigma\delta(\Sigma^3 V) \\ &= \Sigma\Sigma^3\,\delta V \\ &= \Sigma^4\,\delta V \end{aligned}$$

und so läßt sich der Beweis ins Unendliche fortsetzen.

§. 14.

Die vorher bewiesenen Lehrsätze sind nicht minder wahr, wenn die Differenzen unendlich klein sind. Es wird also seyn

$$\delta d z = d \delta z$$
$$\delta d^2 z = d^2 \delta z$$
$$\delta d^3 z = d^3 \delta z, \text{ \&c.}$$
überhaupt $$\delta d^n z = d^n \delta z.$$

Ebenfalls ist

$$\delta \int X d x = \int \delta X d x$$
$$\delta \int\int X d x^2 = \int\int \delta X d x^2$$
$$\delta \int\int\int X d x^3 = \int\int\int \delta X d x^3, \text{ \&c.}$$
überhaupt $$\delta \int^n X d x^n = \int^n \delta X d x^n$$

Hier bedeuten $\int$, $\int\int$, $\int\int\int$, $\int^n$ die auf einander folgenden Integrale einer Differenzial-Funkzion $X d x$, oder $X d x^2$, oder $X d x^3$, oder überhaupt $X d x^n$, wo X irgend eine Funkzion des x ist. Von solchen höheren Integralen ist schon vorher (XV. Hauptstück §. 6) Erwähnung geschehen.

§. 15.

Aufgabe.

Eine Funkzion variiren.

Auflösung. Die Variazionen der veränderlichen Größen sind weiter nichts als eine Art von Differenzialen. Deswegen wird auch die Variazion einer Funkzion eben so gefunden, als das Differenzial derselben. Und wenn man das Differenzial einer Funkzion hat, so bekömt man die Variazion derselben, wenn man nur allenthalben anstatt des Differenzialzeichens d das Variazionszeichen δ setzet. Zum Exempel:

Wenn

$$\text{Wenn} \quad z = xy$$
$$\text{so ist} \quad dz = y\,dx + x\,dy$$
$$\text{folglich} \quad \delta z = y\,\delta x + x\,\delta y$$

Zusatz. Man kann annehmen, daß nicht alle veränderliche Größen in einer Funkzion variiren, und in diesem Falle verschwinden die Sätze, worinn die Variazionen derjenigen Größen enthalten sind, welche nicht variiren sollen. Zum Exempel, wenn $z = xy$, so ist $\delta z = y\,\delta x + x\,\delta y$. Soll aber x nicht variiren, so wird $\delta z = x\,\delta y$.

§. 16.

Aufgabe.

Die Variazion einer Funkzion von x, y, $\frac{dy}{dx}$ oder p, $\frac{dp}{dx}$ oder q, $\frac{dq}{dx}$ oder r, &c. finden.

Auflösung. Es sey

$$\beta = F(x, y, p, q, r, \&c.)$$

so wird, wenn man die Funkzion theilweise für x allein, für y allein, für p allein, u. s. f. differenziret

$$d\beta = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$$

wo M, N, P, Q, R, &c. lauter Funkzionen von x, y, p, q, r, &c. sind. Folglich ist auch

$$\delta\beta = M\,\delta x + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c.$$

Es bleibet also noch übrig, daß man δp, δq, δr, u. s. f. näher bestimme.

$$\text{Weil } p = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{so ist} \quad \delta p = \frac{dx\,\delta dy - dy\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\,\delta y - p\,d\,\delta x}{dx}$$

Weil $q = \frac{dp}{dx}$,

so ist $\delta q = \frac{dx\,\delta dp - dp\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\,\delta p - q\,d\,\delta x}{dx}$

Weil $r = \frac{dq}{dx}$,

so ist $\delta r = \frac{dx\,\delta dq - dq\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\,\delta p - r\,d\,\delta x}{dx}$

und so kann man weiter gehen.

§. 17.

Bis so weit ist man heutiges Tages in der höheren Rechenkunst gekommen. Die lezt vorgetragene Lehre von den Variazionen ist die neueste wichtige Erfindung in der Analysis; sie ist allererst von unserem berühmten Zeitgenossen, Herrn *de la Grange*, in ein ordentliches System gebracht worden. Was ich davon gesagt habe, ist, so wie vieles andere in dem zweiten Theile dieses Buches, nach Anleitung des Herrn *Cousin* in seinen Leçons de Calcul &c. ausgearbeitet worden. Dieses vortrefliche Werk enthält die wichtigsten Lehren der höheren Mathematik. Es ist aber nicht für Anfänger zu gebrauchen, theils weil der Vortrag sehr kurz und gedrungen ist; und theils, weil es sowohl die gemeine Algebra, als auch manche geometrische und mechanische Kenntnisse voraussetzet.

Ende der Algebra.

Innhalt des ersten Theiles.

Erstes Hauptstück.

Von der Addizion oder Zusammensetzung der Größen.

§. 1 bis 4.
Vorläufige Erklärungen über die Größen oder Quantitäten, deren Bezeichnung, die Algebra, die Gleichheit und Ungleichheit der Größen Seite 1 und 2
§. 5 bis 8. Erste Gründe der algebraischen Addizion S. 2 bis 5
§. 9 bis 11. Von den komplexen Größen und den Verwechslungen ihrer Theile S. 5 bis 11
§. 12 bis 17. Von den Zahlen, der Zählung, und der Addizion der Zahlen S. 11 bis 16
§. 18 und 19. Von den Koeffizienten und deren Addizion. S. 16 und 17
§. 20. Von der Probe der Addizion S. 17 und 18
§. 21 und 22. Allgemeine Grundsätze über die Addizion S. 18

Zweites Hauptstück.

Von der Subtrakzion oder von der Abziehung der Zahlen.

§. 1 bis 11. Von der algebraischen Subtrakzion S. 19 bis 25
§. 12. Von der Addizion solcher Größen, wo das Minus-Zeichen vorkömmt S. 26
§. 13. Von der Subtrakzion der Zahlen S. 26 bis 28
§. 14 und 15. Allgemeine Regeln der algebraischen Addizion und Subtrakzion, sowohl in Betrachtung der Koeffizienten als der Zeichen S. 28 bis 30
§. 16. Probe der Subtrakzion S. 30
§. 17 bis 26. Allgemeine Grundsätze über die Subtrakzion, und die daraus entstehende Gleichungen S. 30 bis 34
§. 27 und 28. Erklärung der positiven und negativen Größen, S. 34 und 35

Drittes Hauptstück.

Von der Multiplikazion oder Vervielfältigung der Größen.

§. 1 bis 9. Anfangsgründe der algebraischen Multiplikazion Seite 36 bis 41
§. 10 und 11. Von der Anzahl aller möglichen Verwechslungen der Faktoren S. 41 bis 44
§. 12 bis 15. Von der Ausmessung der Zahlen und den Primzahlen S. 44 bis 47
§. 16 bis 19. Fortsetzung der algebraischen Multiplikazion S. 47 bis 50
§. 20. Addizion und Subtrakzion der Produkte S. 51
§. 21. Multiplikation der bestimmten Zahlen S. 51 bis 55
§. 22. Probe der Multiplikazion S. 55
§. 23 und 24. Allgemeine Grundsätze über die Multiplikazion S. 55

Viertes Hauptstück.

Von der Division oder Theilung der Größen.

§. 1 bis 12. Von der algebraischen Division, nebst der Erklärung der Brüche S. 56 bis 65
§. 13. Division der Zahlen S. 65 bis 71
§. 14. Probe der Division überhaupt S. 71
§. 15 bis 17. Einige Grundsätze der Division, worauf sich die folgende Lehre von den Brüchen gründet S. 71 und 72
§. 18 bis 29. Veränderung des Nenners, Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion, Division der Brüche, und deren Verwandlung in unendliche Reihen S. 72 bis 91
§. 30 bis 33. Lehre von den Dezimalbrüchen und Aufgaben die sich darauf beziehen S. 91 bis 95
§. 34 bis 41. Lehre und Aufgaben über die benannten Brüche, oder benannten Zahlen S. 95 bis 103
§. 42 bis 47. Allgemeine Grundsätze der Division, und deren Anwendung auf die Auflösung leichter Gleichungen S. 103 bis 105

Fünf-

Fünftes Hauptstück.

Von der Erhebung der Größen, oder von Potenzen und Wurzeln.

§. 1 bis 7. Erklärungen und Grundsätze über die Potenzen und Wurzeln, nebst dem Ursprunge der negativen und gebrochenen Exponenten S. 106 bis 110
§. 8 und 9. Von der Multiplikazion und Division gleichwurzliger Potenzen S. 110 bis 113
§. 10 bis 13. Wie man eine Potenz, einen Bruch, ein Produkt, eine komplexe Größe erheben soll S. 113 bis 119
§. 14 bis 20. Von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen, nebst der Erklärung der irrazionalen Zahlen S. 120 bis 135
§. 21 bis 25. Die Lehre von den Verwechslungen S. 135 bis 143
§. 26 bis 29. Anwendung der vorigen Lehre auf die Potenzen, und Beweis der Newtonischen Regel S. 144 bis 151
§. 30 bis 33. Einige Grundsätze über die Erhebung der Grössen und Gebrauch dieser Operazion bei der Auflösung leichter Gleichungen S. 151 und 152

Sechstes Hauptstück.

Von der Exponenziazion der Größen, oder von den Logarithmen.

§. 1 bis 11. Theorie des Verfassers von den logarithmischen Größen, nebst einigen Aufgaben, die sich darauf beziehen S. 153 bis 164
§. 12 bis 14. Zwei Methoden des Verfassers, um den Logarithmus einer Zahl für eine gegebene Basis zu finden, nebst Erklärung der Kettenbrüche S. 164 bis 172
§. 15 bis 24. Verschiedene Aufgaben, betreffend den Gebrauch der Logarithmen und der Logarithmen-Tafeln S. 172 bis 179
§. 25 bis 28. Allgemeine Grundsätze, die Exponenziazion betreffend, und Auflösung leichter Gleichungen vermittelst dieser Operazion S. 179 bis 181

§. 29 bis 31. Allgemeine Bemerkungen über Logarithmen, algebraische Rechnungsarten, und Algorithmen S. 181 und 182

Anmerkung. Die Lehre von den Logarithmen wird wiederum im 18ten Hauptstücke vorgenommen und weiter ausgeführet. Was also hier noch fehlet muß dort gesuchet werden.

Siebentes Hauptstück.

Von negativen und imaginären Größen.

§. 1 und 2. Einleitung S. 183

§. 3 bis 6. Vom Gebrauche der negativen Größen in der Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion und Division S. 183 bis 185

§. 7 bis 16. Von dem Gebrauche und der Bedeutung der negativen Größen in der Erhebung, das ist bei Potenzen und Wurzeln; nebst der Erklärung der imaginären Größen S. 186 bis 194

§. 17. Vom Gebrauche der negativen Größen bei der Exponenziazion oder Erforschung der Logarithmen S. 194

Achtes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Differenzen.

§. 1. Erklärung des Wortes Differenz S. 195

§. 2 bis 13. Erklärung des Verhältnisses, der Proporzion, und der Progression, sowohl überhaupt als besonders im arithmethischen Verstande S. 195 bis 200

§. 14 bis 20. Von der getrennten arithmetischen Proporzion S. 200 bis 205

§. 21 bis 24. Von der zusammenhängenden arithmetischen Proporzion S. 205 bis 208

§. 25 bis 30. Von der arithmetischen Progression S. 208 bis 214

Neuntes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Razionen.

§. 1 bis 9. Erklärungen der Razion oder des geometrischen Verhältnisses, der geometrischen Proporzion, und der geometrischen Progression S. 215 bis 219
§. 10 und 11 Geometrisches Verhältniß, welches allemal in der Multiplikazion und Division statt findet S. 219 und 220
§. 12 bis 19. Von der zusammenhängenden geometrischen Proporzion S. 220 bis 227
§. 20 bis 23. Von der getrenneten geometrischen Proporzion S. 227 bis 229
§. 24 bis 29. Von der geometrischen Progression S. 230 bis 234
§. 30 bis 38. Von der geraden Regel de Tri S. 234 bis 241
§. 39. Von der verkehrten Regel de Tri S. 241 bis 243
§. 40 und 41. Von der zusammengesezten, sowohl geraden als verkehrten Regel de Tri S. 243 bis 247
§. 42. Von der Zins-Rechnung S. 247 bis 250
§. 43. Von der Termin-Rechnung S. 251 bis 257
§. 44. Von der Gesellschaft-Rechnung S. 257 bis 260
§. 45. Von der Ketten-Rechnung S. 260 bis 262
§. 46. Die Namen einiger anderer Rechnungsarten, welche auf der Regel de Tri gegründet sind. S. 262

Zehntes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Logarithmen.

§. 1 bis 10. Neue Lehre von logarithmischen Proporzionen S. 263 bis 269
§. 11 und 12. Von der zusammenhängenden logarithmischen Proporzion S. 269 bis 271
§. 13 bis 16. Von der logarithmischen Progression S. 271 bis 274
§. 17. Anmerkung über die vorgetragene Theorie.

Eilftes Hauptstück.

Von den Gleichungen mit einer einzigen unbekannten Größe.

§. 1. Einleitung S. 275
§. 2 und 3. Von der Auflösung der reinen Gleichungen S. 275 bis 281
§. 4 bis 11. Von den vermischten Gleichungen, deren Einrichtung und Veränderungen S. 281 bis 288
§. 12 bis 21. Von der Entstehung der Gleichungen von höheren Graden aus einfachen, und von den Wurzeln der Gleichungen S. 288 bis 293
§. 22 bis 24. Von der Erforschung der Wurzeln für Gleichungen, wo die Koeffizienten bestimmte Zahlen sind S. 293 bis 302
§. 25 bis 27. Von der Auflösung der quadratischen und kubischen Gleichungen durch allgemeine Formeln S. 302 bis 312
§. 28 bis 30. Von der Falsi-Rechnung S. 313 bis 320

Innhalt des zweiten Theiles.

Zwölftes Hauptstück.

Von den Gleichungen, mit mehr als einer unbekannten Größe.

§. 1 bis 3.
Auflösung der bestimmten Gleichungen von zwei oder mehr unbekannten Größen Seite 3 bis 14
§. 4 bis 7. Auflösung der unbestimmten Gleichungen S. 14 bis 24
§. 8 und 9. Von der Alligazion-Rechnung S. 24 bis 33
§. 10. Von der Cöci-Rechnung S. 33 bis 40
§. 11. Verwandschaft der Alligazion-Rechnung und Cöci-Rechnung S. 40 bis 45

Dreizehntes Hauptstück.

Von den Funkzionen.

§. 1 bis 14. Erklärungen über die Funkzionen, ihre verschiedene Arten, ihre Grade, ihre Entstehung S. 46 bis 57
§. 15 bis 17. Von dem Gebrauche der unbestimmten Koeffizienten, und von der Verwandlung einer gebrochenen oder irrazionalen Funkzion in einzelne Brüche oder in eine unendliche Reihe S. 58 bis 68
§. 18 bis 27. Von den Gleichungen zwischen veränderlichen Größen S. 68 bis 77

Vierzehntes Hauptstück.

Von den Differenzen der Funkzionen.

§. 1 bis 7. Von der ersten Differenz einer Funkzion oder Gleichung S. 78 bis 85
§. 8 bis 13. Von den höheren Differenzen der Funkzionen und Gleichungen S. 85 bis 95
§. 14 bis 16. Lehrsätze über die Differenzen der Funkzionen S. 95 bis 99

Funfzehntes Hauptstück.

Von der Erfindung der Funkzionen aus ihren Differenzen, und von den Reihen.

§. 1 bis 8. Von den Summen der Differenzial-Funkzionen S. 100 bis 107
§. 9 und 10. Von der willkührlichen beständigen Größe, die zur vollständigen Summe einer Differenzial-Funkzion gehört S. 107 bis 110
§. 11 bis 15. Von den Reihen, deren allgemeinen Sätzen, deren Aggregaten S. 110 bis 123
§. 16 bis 19. Von den Polygonal-Zahlen S. 123 bis 130
§. 20 bis 22. Von den figurirten Zahlen S. 131 bis 136
§. 23. Von einigen andern Zahl-Reihen, und von den geometrischen Progressionen, die ohne Ende abnehmen S. 136 bis 138

Sechszehntes Hauptstück.

Von den unendlich kleinen Differenzen der Funkzionen, oder von der Differenzial-Rechnung.

§. 1 bis 12. Von den sehr kleinen Differenzen und deren Berechnung S. 139 bis 148
§. 13 bis 21. Erklärung der unendlich kleinen Differenzen, oder der Differenziale S. 148 bis 150
§. 22 bis 27. Von den höheren Differenzialen S. 150 bis 166
§. 28 bis 33. Von den Parzial-Differenzen und deren Eigenschaften S. 166 bis 175

Siebenzehntes Hauptstück.

Von einigen Anwendungen der Differenzial-Rechnung.

§. 1 bis 3. Von der Erfindung der vollständigen Differenz einer Funkzion aus ihrem Differenziale, nebst dem Beweise der Newtonschen Regel für die binomischen Potenzen, in dem

dem Falle, wo der Exponent negativ oder gebrochen ist S. 176 bis 183
§. 4. Von dem Werthe des Verhältnisses $\frac{0}{0}$ S. 183 bis 189
§. 5 bis 9. Von dem Maximum oder Minimum einer Funkzion S. 189 bis 199

Achtzehntes Hauptstück.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Exponenzial-Größen und Logarithmen.

§. 1. Was eine Exponenzial-Größe ist, wie die Logarithmen und Proporzional-Zahlen daraus entstehen S. 200
§. 2 bis 7. Von dem Modulus oder der Subtangente eines jeden Systemes, bloß algebraisch betrachtet und ohne Beziehung auf die Geometrie S. 200 bis 207
§. 8. Von der Differenziazion der Logarithmen und Exponenzial-Größen S. 207 bis 209
§. 9 bis 11. Von der Ausdrückung der Logarithmen und Proporzional-Zahlen durch unendliche Reihen S. 209 bis 216
§. 12 und 13. Von der vollständigen Differenz der Proporzional-Zahlen und Logarithmen S. 216 bis 218
§. 14. Von der abgekürzten Multiplikazion der Dezimal-Brüche S. 218 bis 224
§. 15 bis 23. Weitläuftige Anweisung zum Gebrauche der Logarithmen-Tafeln S. 224 bis 243

Neunzehntes Hauptstück.

Von der Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Zirkel-Größen.

§. 1 bis 5. Erklärung der Zirkel-Größen, bloß algebraisch, und als unendliche Reihen betrachtet S. 244 bis 253
§. 6 u. 7 Differenziazion der Zirkel-Größen S. 253 bis 264

Zwanzigstes Hauptstück.

Von der Erfindung der Funkzionen aus ihren unendlich kleinen Differenzen, oder von der Integral-Rechnung.

§. 1 bis 8. Von der Integration der Differenzial-Funkzionen und Gleichungen von der ersten Ordnung, und mit einer einzigen veränderlichen Größe S. 265 bis 286
§. 9 bis 11. Von der Integrazion der Differenzial Funkzionen und Gleichungen von der ersten Ordnung, mit zwei veränderlichen Größen S. 286 bis 294
§. 12 bis 14. Von der Integrazion der Differenzial-Funkzio- von der zweiten Ordnung S. 295 bis 306

Ein und zwanzigstes Hauptstück.

Von den unbestimmten Funkzionen und der Variazions-Rechnung.

§. 1 bis 3. Erklärungen über die unbestimmten Funkzionen S. 307 bis 309
§. 4 bis 7. Von der Integrazion der unbestimmten Parzial-Differenzen S. 309 bis 314
§. 8 bis 17. Grundsätze der Variazions-Rechnung S. 314 bis 322

Druck-

Bayerische Staatsbibliothek München

Druckfehler und Verbesserungen.

Es wäre zu wünschen, daß ein Werk, welches für Anfänger geschrieben ist, von allen Druckfehlern gereiniget seyn könnte. Wer aber die Schwierigkeiten kennet, welche damit verknüpfet sind, hauptsächlich bei einem mathematischen Werke, wird gewiß einige Nachsicht sowohl für den Verfasser als für den Setzer haben. Folgende Stellen wird der Leser gebeten, vor dem Gebrauche dieses Buches, mit der Feder zu verbessern.

Im ersten Theile.

Seite 1. Zeile 2. Im Titel des ersten Hauptstückes muß gelesen werden: Addizion oder Zusammensetzung anstatt Addizion und Zusammensezung.

S. 18. stehet §. 26. anstatt § 21. und §. 27. anstatt §. 22.

S. 29. Z. 14. muß gelesen werden: Aggreganden, anstatt Aggregenden. Auf der nemlichen Seite unterwärts stehet §. 7. anstatt §. 15.

S. 48. unterwärts, fehlet das Wort Aufgabe nach §. 17.

S. 49. in der Mitte, fehlet ebenfalls das Wort Aufgabe nach §. 18.

S. 61. unterwärts, stehet in der Aufgabe Größr anstatt Größe.

S. 111. Z. 2. am Ende der Zeile, stehet im Zähler des Exponenten c anstat e. Es muß heißen: $a^{\frac{be+d}{e}}$

S. 174. Z. 17. anstatt (von ihrem Erfinder Brigge) lese man: (von dem Engländer Brig's, der sie am ersten berechnet hat.)

S. 176. über der Aufgabe muß stehen: §. 22. nicht §. 24.

S. 257. am Anfang des §. 44. muß es heißen: Gesellschaft-Rechnung, nicht Gesellschafts-Rechnung.

Im zweiten Theile.

S. 3. in der Mitte, muß stehen §. 2. anstatt 7.

S. 64. in der Aufgabe, anstatt eine gebrochene Funkzion, muß gelesen werden: eine gebrochene oder irrazionale Funkzion.

S. 159. Z. 16. stehet im Zähler d^2x anstatt d^2y. Es muß nemlich heißen: $y = \frac{d^2y}{dx^2} +$ u. s. f.

S. 160. Z. 3. ganz am Ende der Zeile, muß der Exponent 3 seyn anstatt 2, nemlich es soll heißen: $\frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

Auf der nemlichen Seite, Z. 17. muß stehen: $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$ anstatt: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Es muß also gelesen werden: $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$

Ich hoffe, daß der Leser sonst keine Fehler entdecken wird, die den Sinn oder den Zusammenhang stören könnten.

Verzeichniß derjenigen Bücher,
welche
in der Leipziger Ostermesse 1786 bei de Lagarde und Friedrich herausgekommen, und zu den beygefügten Preisen bei den Verlegern sowohl, als in allen Buchhandlungen zu haben sind.

Abhandlung über die Natur, Entstehungsart, Verschiedenheit und Heilmethode der bösartigen Blatter, auf Begehren der Staaten von Bourgogne, von den Herren Enaux und Chaussier herausgegeben, 8. 6 gr.

Beyträge zur Kritik der schönen Wissenschaften, eine Quartalschrift.. 1ster Jahrg. 1stes Quartal. gr. 8. 6 gr.

Bodley (Richard) oder die unglückliche Vorsicht, nach dem Franz. der Frau v. Malarme, 2 Theile. 8. 1 Rthlr. 6 gr.

Bürja (A) der selbstlernende Algebrist, oder deutliche Anweisung zur ganzen Rechenkunst, worunter sowohl die Arithmetik und gemeine Algebra, als auch die Differenzial- und Integral-Rechnung begriffen ist, 2 Theile, gr. 8. 1 Rthlr. 12 gr.

Colonie (l'heureuse) ou célébration du Jubilé des Colonies françoises dans les Etats du Roi. Recueil de Sermons prononcés dans les cinq Paroisses de Berlin, avec une Preface historique, gr. 8. 16 gr.

Folgen einer akademischen Mädchenerziehung, mit unter einige Geniestreiche, kein pädagogischer Roman. 8. 9 gr.

Landmädchen (das verführte) oder die Gefahren der Stadt, a. d. Franz. des Retif de la Bretonne, 3r. 4r und letzter Theil. 8. Schreibp. 1 Rthlr. 8 gr.

— Alle 4 Bände complet, mit Titelkupf. 2 Rthlr. 16 gr.

Lettre de Monsieur le Comte de Mirabeau a *** sur Lavater & Cagliostro. gr. 8. 6 gr.

Mémoire historique sur la fondation des Colonies françoises dans les Etats du Roi, publié a l'occasion du Jubilé célébré en Octobre 1785. gr. 8. sur papier d'Hollande. 8 gr.

Mira-

Mirabeau (des Grafen v.) Bemerkungen über den Amerikanischen Cincinnatus-Orden, a. d. Franz. gr. 8.

Mirabeau (des Grafen v.) Schreiben an *** über Lavater und Cagliostro. 8. 5 gr.

Nachricht (historische) v. d. Stiftung der franz. Kolonien in den Preuß. Staaten, herausgegeben bey Gelegenheit des hundertjährigen Jubiläums, welches im October 1785 gefeyert worden. gr. 8. 6 gr.

Silberschlag (J. E. Königl. Preuß. Ober-Consistorialrath) Gedächtnißpredigt auf Herrn Prediger Lüdecke. gr. 8. 3 gr.

In Commißion.

Alceste, in einem Clavier-Auszuge von M***. Querfolio. 1 Rthlr. 16 gr.

Ichtyologie, ou hist. nat. gen. & part. des Poissons par Mr. le Docteur Bloch, fol. gr. papier, *av. fig. enluminées*, Tome III. *prix de Souscription* 18 Rtl.

Systême de Philosophie, contenant la Logique & la Métaphysique pr. Mr. Pierre Bayle, imprimé par ordre du Roi de Prusse. 8. 20 gr.

Tableaux des Batailles livrées par S. M. le R. de Prusse, par Mr. Muller, *av. les plans nécessaires gravés & enluminés.* 4. grand pap. 4 Rtl. 12 gr.

Denina, Discorso sopra le vicende della Letterarura. 2 Vol. gr. 8. Berlino 2 Rtl. 4 gr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Burja, Abel, 1752-1816

Der selbstlernende Algebrist, oder deutliche Anweisung zur ganzen Rechenkunst worunter sowohl die Arithmetik und gemeine Algebra, als auch die Differenzial- und Integral-Rechnung begriffen ist
Bd.: 2

Berlin und Libau (1786)

Math.p. 60-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137649-8
VD18 90238044